MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES

La théorie des chaines de Markov et ses applications économiques

Ancot, Jean-Pierre

Award date:
1967

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTÉS NOTRE-DAME DE LA PAIX — NAMUR
FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES
ANNÉE ACADÉMIQUE 1966 - 1967

Jean-Pierre ANCOT

LA THÉORIE DES CHAINES DE MARKOV ET SES APPLICATIONS ÉCONOMIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Licencié en Sciences Économiques et Sociales
(Analyse Économique)

Jury du mémoire :
MM. L. Derwa
F. Bodart
J. Paelinck

Ce travail a été conduit sous la direction du Professeur L. Derwa et c'est grâce à son aide bienveillante et à ses suggestions des plus utiles qu'il a pu être mené à bonne fin; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute notre gratitude.

Nous remercions également Monsieur F. Bodart et le Professeur J. Paelinck des avis et critiques qu'ils ont bien voulu formuler avant l'élaboration du texte définitif.

Notre reconnaissance va enfin au Professeur J.A.C. Brown, de l'Université de Bristol (Grande-Bretagne), qui nous a permis d'y effectuer un séjour des plus fructueux, et à Monsieur Ord qui, au cours de ce séjour, nous a constamment conseillé et guidé.

INTRODUCTION

Les modèles utilisés en théorie économique et en économétrie n'ont, en général, atteint une certaine perfection que dans le cadre de l'hypothèse d'un univers statique ou, tout au plus de statique comparative. Depuis plusieurs années, les chercheurs économiques semblent orienter leur effort davantage vers la construction de modèles dynamiques et cet effort se caractérise par le fait qu'il est perçu dans toutes les disciplines économiques. La théorie des chaînes de Markov offre une possibilité de dynamiser certains modèles économiques en les basant sur l'hypothèse markovienne selon laquelle, sous sa forme la plus simple, la probabilité qu'un événement ait lieu à l'époque t ne dépend directement que de l'événement qui a eu lieu à l'époque t-1. Cette hypothèse semble, en effet, dans certains cas, représenter une base de description suffisamment réaliste d'un processus économique évolutif.

Cette théorie des chaînes de Markov est tout particulièrement un des instruments mis à la disposition du chercheur opérationnel, spécialement dans le domaine économique de la gestion de la firme. La Recherche Opérationnelle est difficile à définir: elle est moins qu'une science, mais plus qu'une méthode. Nous sommes tentés de dire qu'elle correspond à un double processus d'optimation, que nous décririons alors comme suit: le chercheur opérationnel travaille dans un cadre institutionnel et s'efforce de trouver l'optimum pour les problèmes qui lui sont proposés. Dans un premier mouvement, il s'agit de découvrir la ou les méthodes de solution qui soient optimales par rapport aux contraintes institutionnelles qui lui sont imposées (grandeur et qualification de l'équipe de travail dont il dispose, budget à consacrer à l'étude, temps imposé, capacité de calcul de l'équipement, etc...). Ce premier problème d'optimation étant résolu, il faut, au moyen de la ou des techniques sélectionnées, résoudre le problème lui-même et, d'ailleurs, en trouver la solution optimale. Il suit de cette conception de la Recherche Opérationnelle, que l'utilisation de méthodes particulières (telles que la programmation linéaire ou la programmation dynamique, par exemple) ne peut se décider a priori, mais dépendra toujours d'une connaissance préalable de chaque problème concret et de chaque situation de travail. C'est dans cette optique que nous avons placé ce mémoire qui vise à décrire, à la manière d'une monographie, la théorie des chaînes de Markov et ses possibilités d'application à l'économie. Il eût été, en effet, contraire à la logique même de la Recherche Opérationnelle de décider d'emblée d'utiliser la technique des chaînes de Markov pour telle étude empirique.

Le but que nous nous sommes proposé dans ce travail est de jeter un pont entre la théorie des chaînes de Markov, élaboration mathématique abstraite, et ses utilisations concrètes à des problèmes économiques. Cette préoccupation nous a amené à considérer trois niveaux de recherche correspondant respectivement aux trois chapitres de ce mémoire. Dans un premier temps, il s'agissait de rendre la théorie opérationnelle. Ceci a consisté à dégager de la littérature - qui est caractérisée par de nombreuses divergences et imprécisions - tout d'abord une terminologie homogène et cohérente, afin de se constituer un cadre de référence rigoureux et, ensuite, les principales propriétés auxquelles il sera fait appel dans les applications économiques. C'est au moyen de ces propriétés que nous montrerons, dans un second chapitre, comment certains problèmes économiques particuliers peuvent être décrits par un modèle en chaînes de Markov. Il apparaîtra, en retour, qu'une correspondance pourra être établie entre les éléments d'un problème économique et les concepts théoriques définis au chapitre 1. Enfin, considérant que la plupart des problèmes économiques - et spécialement ceux qui sont du domaine de la Recherche Opérationnelle au sein de la firme - sont des problèmes d'optimation, un troisième chapitre sera consacré à résoudre parmi ces problèmes ceux qui peuvent être formulés en termes de chaînes de Markov. Ce dernier chapitre complète logiquement à la fois le premier chapitre, en ce qu'il prolonge la description théorique des chaînes de Markov par la présentation des méthodes théoriques susceptibles de résoudre les problèmes d'optimation associés à ce type de modèle et le second chapitre, du fait que la nature même de la plupart des problèmes économiques se réduit à la recherche d'un optimum contraint.

Remarquons, dès l'abord, qu'à ce travail il manque au moins un quatrième chapitre. Celui-ci eût été consacré à une étude des problèmes statistiques qui se posent lors du passage de l'étude théorique des chaînes de Markov à ses utilisations empiriques à l'économie. S'il est, en effet, relativement simple de résoudre les problèmes posés par un modèle markovien dès que les paramètres du système sont connus, l'estimation et la signification statistique de ceux-ci semblent être des points particulièrement ardus. Il se fait, toutefois, que ces problèmes statistiques, si intéressants soient-ils, sont à la fois trop vastes et trop spécialisés pour qu'ils s'insèrent harmonieusement dans le cadre de ce travail. Il y a néanmoins là un vaste terrain ouvert à la recherche.

Tout en reprenant, dans les conclusions finales, l'essentiel de notre travail dans une perspective de synthèse, nous y indiquerons également quels sont, à notre avis, les possibilités de développement et de recherche ultérieurs.

Chapitre 1

LA THEORIE DES CHAINES DE MARKOV FINIES

CHAPITRE 1 - LA THEORIE DES CHAINES DE MARKOV FINIES

Introduction

L'objet de ce premier chapitre est de résumer la théorie des chaînes de Markov de manière claire et synthétique, et dans le but d'en dégager les propriétés utiles pour la description et l'analyse de phénomènes économiques.

La littérature en matière de chaînes de Markov présente de nombreuses divergences quant aux termes utilisés pour désigner un même concept. Cette anarchie de la terminologie est fâcheuse pour le chercheur opérationnel, car elle tend à rendre très confuse une matière où les raisonnements deviennent relativement simples dès que l'on précise clairement les hypothèses de départ et les définitions des concepts utilisés. Il nous a donc semblé indiqué d'effectuer au cours de ce premier chapitre, une mise en ordre qui n'a nullement la prétention d'être un travail d'élaboration mathématique, mais qui sera néanmoins utile à la Recherche Opérationnelle. Les différentes positions des auteurs seront présentées brièvement et un vocabulaire en sera dégagé. Les critères de choix sont évidents. Tel qualificatif sera préférable à tel autre, s'il est plus clair ou s'il est plus communément utilisé. En outre, le vocabulaire le plus homogène sera le meilleur. Cette discussion se cristallisera autour de la notion d'ergodicité.

Nous aboutirons ainsi à une classification claire des différents types de chaînes de Markov finies. Si cet effort est utile d'un point de vue purement théorique, nous verrons, d'autre part, au cours du chapitre 2, comment il permet une analyse structurelle des applications économiques.

Au-delà de cette mise en ordre de la terminologie, nous dégagerons simultanément les principales propriétés qui caractérisent chaque type particulier de chaîne de Markov. Ce sera, en effet, sur base de ces propriétés et après avoir effectué une première analyse structurelle du modèle économique qu'on pourra mettre en évidence ses caractéristiques dynamiques.

Finalement, quelques méthodes de calcul seront exposées. Celles-ci simplifieront considérablement le traitement des applications.

Les théorèmes et les propriétés seront, en général, énoncés sans démonstration, afin de ne pas surcharger le texte et de sauvegarder la clarté de l'exposé. Ces démonstrations se trouvent explicitées dans la littérature et l'un ou l'autre ouvrage sera indiqué, à titre de référence.

—o—

1.1. Processus stochastiques et chaînes de Markov.-

Les chaînes de Markov s'insèrent, comme cas particulier, dans la théorie des processus stochastiques.

Un processus est dit stochastique s'il s'agit d'un système évoluant dans le temps ou dans l'espace, selon certaines lois de probabilités. Celles-ci peuvent être ramenées à trois formes fondamentales, reliées entre elles par l'axiome des probabilités composées.

$$\text{prob } (x \text{ et } y) = \text{prob } (x).\text{prob}.(y/x),$$

c'est-à-dire que la probabilité que les événements x et y se présentent est égale au produit de la probabilité que l'événement x se présente seul et de la <u>probabilité conditionnelle</u>

que l'événement y se présente, lorsque l'on sait que l'événement x s'est présenté. S'il s'agit de l'évolution d'un système dans le temps, la possibilité que le système se trouve dans un certain "état" à un moment du temps peut être indépendante ou dépendante de son passé. Dans ce dernier cas, il s'agira d'une probabilité conditionnelle et celle-ci peut, à son tour, prendre différentes formes, d'après la manière dont elle dépend <u>explicitement</u> du passé du système. Un cas particulier sera celui où tout le passé de l'évolution du système se trouve résumé dans son état au dernier instant.

Dès lors, un processus stochastique est appelé markovien si, pour des instants <u>arbitrairement</u> choisis du temps, ...$< l < m < n$, il répond à la propriété

$$p_{X_n}(x/X_m = y,\ X_l = z,\ \dots) = p_{X_n}(x/X_m = y) \qquad (1.1.1)$$

où

$$p_{X_n}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{prob}\ (x < X_n < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

X_n représentant l'état dans lequel se trouve le système au temps n. En d'autres mots, la connaissance de l'état du système aux instants consécutifs, ..., l, m, antérieurs à n, apporte bien, quant à la connaissance de son état en n, une certaine information, mais celle-ci est contenue tout entière dans la connaissance de son état à l'instant le plus récent, m.

On dira qu'un processus markovien est une chaîne de Markov s'il obéit aux trois restrictions suivantes :

1. L'espace temporel sur lequel il est défini est <u>discret</u> et les instants de transition sont équidistants. En d'autres termes, l'intervalle entre deux points successifs du temps est supposé constant, quels que soient ces points, et lorsque le

temps s'écoule de l'instant n à l'instant $n + 1$, le système peut, soit passer d'un état à un autre et un seul, soit rester dans le même état, sans passer par d'autre(s) état(s).

2. <u>Homogénéité dans le temps</u>

Un processus markovien est dit homogène si

$$\text{prob } (X_{m+n+1} = k/X_{m+n} = j) = \text{prob } (X_{n+1} = k/X_n = j) \quad (1.1.2)$$

ce qui signifie que les probabilités ne sont pas affectées par une translation dans le temps (1).

3. <u>Ces chaînes de Markov sont d'ordre 1</u>

Certains auteurs ont défini des chaînes de Markov d'ordre r, par la propriété

$$\text{prob } (X_{n+1} = k/X_0 = a, \ldots, X_{n-r+1} = h, \ldots, X_n = j) =$$
$$\text{prob } (X_{n+1} = k/X_{n-r+1} = h, \ldots, X_n = j) \quad (1.1.3)$$

c'est-à-dire que les états X_{n-r+1} , X_{n-r+2} , ..., X_n résument pour X_{n+1} tous les états antérieurs et donc, que l'état du système à l'instant $n + 1$ dépend explicitement, non plus seulement de l'état immédiatement antérieur, mais des r états antérieurs du système.

Cette notion ne semble cependant plus pravaloir dans la littérature actuelle où l'on désigne habituellement par chaînes de Markov les "chaînes de Markov d'ordre 1".

---

(1) Il ne faut pas confondre homogénéité dans le temps et stationnarité. Nous verrons plus loin que, sous certaines conditions, une chaîne de Markov converge vers une distribution limite, c'est-à-dire vers un processus stationnaire. Un tel processus obéit à une loi de probabilité qui est indépendante du temps.

On entendra donc par chaîne de Markov une séquence de variables aléatoires discrètes X_0, X_1, ... possédant la propriété que la distribution conditionnelle de X_{n+1}, étant donnés X_0, X_1, ..., X_n, ne dépend directement que de la valeur de X_n, soit

$$\text{prob}\,(X_{n+1} = k/X_0 = a, \ldots, X_n = j) = \text{prob}(X_{n+1} = k/X_n = j) \tag{1.1.4}$$

où a, ..., j, k appartiennent à l'espace discret des états que peut prendre le système.

On notera que, du point de vue historique, la notion de chaîne de Markov correspond à des définitions de plus en plus restrictives (1).

Dans son ouvrage fondamental en cette matière [C 3], Kai Lai Chung distingue les chaînes de Markov à paramètres discrets des chaînes de Markov à paramètres continus. La définition, plus restrictive, adoptée ci-dessus, ne couvre que ce que K.L. Chung entend par chaînes de Markov à paramètres <u>discrets</u> (2).

Une chaîne de Markov sera dite finie ou infinie, selon que la séquence de variables aléatoires X_0, X_1, ..., ou selon que l'ensemble des états du système comporte un nombre fini ou infini d'éléments. Dans ce qui suit, on se limitera au cas des chaînes de Markov finies. Les applications économiques sont, en effet, généralement de cet ordre.

---

(1) Voir [G 1], p. 9.

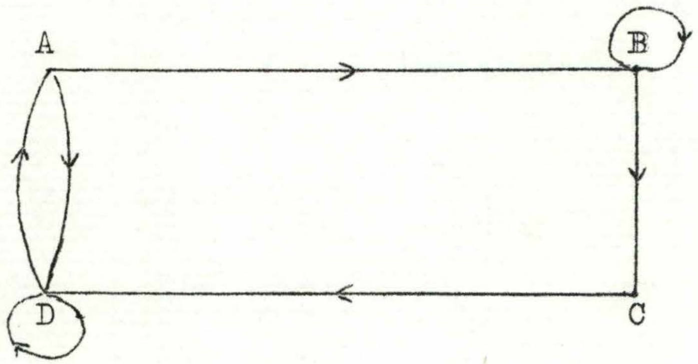
(2) D'autre part, on se référera à cet ouvrage en ce qui concerne les fondements axiomatiques du calcul des probabilités, sous-jacent à la matière traitée dans ce chapitre.

1.2. Types de probabilités.-

Les concepts de base relatifs à une chaîne de Markov sont ceux d'"états" dans lesquels se trouve le système et de "transition" d'un état à un autre.

La notion d'états a été précisée précédemment, sous 1.1. Ceux-ci seront désignés par les symboles 1, 2, ... R ($R < \infty$ puisqu'il s'agit de chaînes finies). On dira que le système "est dans l'état i à l'instant n", si la transition qui s'effectue à l'instant n l'amène (ou éventuellement le laisse) en i.

Un processus de Markov, tel que nous l'avons défini, peut être représenté par une relation, par un graphe ou par une matrice. Un exemple d'un processus markovien, représenté par une relation, est A.B; B.B; B.C; C.D; D.D; D.A; A.C; D.B; A.D; où la paire ordonnée A.B représente la transition de l'état A à l'état B. Une présentation équivalente, sous forme de graphe, est donnée ci-dessous.



Les vecteurs orientés joignant les différents points indiquent les transitions possibles. A chacun de ces vecteurs, on peut associer une probabilité. Toutefois, la présentation sous forme matricielle, ayant été davantage élaborée, sera uniquement retenue par la suite.

La <u>probabilité de transition</u> de i à j, définie dans la section 1.1 par

$$\text{prob}\ (X_{n+1} = j / X_n = i)$$

sera dorénavant notée p_{ij}, élément de la <u>matrice de transition</u>

$$[P] = [p_{ij}] \ .$$

La <u>probabilité initiale</u> ou la probabilité que le système se trouve initialement dans l'état i, se note p_i, élément du <u>vecteur de probabilités initiales</u>

$$[p] = [p_i] .$$

Les probabilités initiales et de transition satisfont évidemment aux propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i \geqslant 0 \ ; \ \sum_{i=1}^{R} p_i = 1 \\ p_{ij} \geqslant 0 \ ; \ \sum_{j=1}^{R} p_{ij} = 1 \end{array} \right. \quad \text{pour tout i, j.}$$

Dans ces conditions, la matrice $[P]$ est dite matrice <u>stochastique</u>.

La <u>probabilité de transition en n étapes de i à j</u> est représentée par $p_{ij}^{(n)}$. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ij}^{(0)} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \qquad = 1 \text{ si } i = j \\ p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \end{array} \right.$$

Dès lors, $p_{ij}^{(n+1)}$ est défini par la formule de récurrence

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{R} p_{ik}^{(n)} \, p_{kj} \qquad (1.2.1)$$

équation qui se généralise pour $p_{ij}^{(m+n)}$

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=1}^{R} p_{ik}^{(m)} \, p_{kj}^{(n)} \qquad (1.2.2)$$

Cette dernière équation est appelée équation de Chapman-Kolmogorov (cas discret).

L'équation (1.2.1) s'écrit en notation matricielle

$$\left[P^{(n+1)}\right] = \left[p_{ij}^{(n+1)}\right] = \left[\sum_{k=1}^{R} p_{ik}^{(n)} \, p_{kj}\right] = \left[P^{(n)}\right]\left[P\right] \qquad (1.2.3)$$

et, en vertu de la récurrence sur n, on obtient finalement

$$\left[P^{(n+1)}\right] = \left[P^{\,n}\right]\left[P\right] = \left[P\right]^{n+1} \qquad (1.2.4)$$

$\left[P\right]^{n+1}$ étant une matrice stochastique, parce que $\left[P\right]$ en est une (1).

On vient de définir la probabilité que le système se trouve en j après n étapes, sachant qu'il part de i. En d'autres termes, on a supposé $p_i = 1$. Si l'on ne connaît pas l'état de départ, la probabilité que le système se trouve en j après n étapes sera

$$p_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{R} p_k p_{kj}^{(n)} \qquad (1.2.5)$$

(1) Preuve: [C 3], pp. 8 et 9, par exemple.

parfois appelée probabilité inconditionnelle. En notation matricielle

$$\left[P^{(n)}\right] = \left[p\right]\left[P\right]^{n} \qquad (1.2.6)$$

La probabilité que le système partant de j revienne pour la première fois en j après n étapes sera désignée par $f_{jj}^{(n)}$. On a

$$f_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{jj}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} \qquad (1.2.7)$$

La probabilité que le système revienne tôt ou tard en j, sachant qu'il est parti de j, est

$$f_{jj}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} \qquad (1.2.8)$$

Si $f_{jj}^{*} = 1$, on définit

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \qquad (1.2.9)$$

comme étant le temps moyen de récurrence. Cette notion sera explicitée dans les sections suivantes.

La probabilité que le système, partant de i, passe en j pour la première fois après n étapes, est

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{jj}^{(n-k)} p_{ij}^{(k)} \qquad (1.2.10)$$

$f_{ij}^{(n)}$ est parfois appelée la probabilité de premier passage de i à j [C 5].

La probabilité que le système arrive tôt ou tard en j, sachant qu'il est parti de i, est

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \tag{1.2.11}$$

Si $f_{ij}^{*} = 1$, on définit

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ij}^{(n)} \tag{1.2.12}$$

comme étant le <u>temps moyen de premier passage</u> de i à j [C 3].

La probabilité de premier passage $f_{ij}^{(n)}$ et la probabilité de premier retour $f_{jj}^{(n)}$ peuvent se calculer par multiplication matricielle :

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik}\, f_{kj}^{(n-1)} \tag{1.2.13}$$

ou, en notation matricielle :

$$\left[F^{(n)}\right] = \left[P\right]\left[G^{(n-1)}\right] \tag{1.2.14}$$

où $\left[G^{(n-1)}\right]$ est la matrice $\left[F^{(n-1)}\right]$ dans laquelle on a remplacé tous les éléments diagonaux par des zéros.

La relation (1.2.14) fournit une méthode de calcul rapide qu'il sera utile d'appliquer dans les problèmes économiques tels que ceux qui seront présentés au chapitre 2.

1.3. <u>Types d'états et classification des états</u>.-

1. S'il existe un m positif, tel que $p_{ij}^{(m)} > 0$, le système

peut passer de i à j. K.L. Chung dit que <u>l'état i mène à l'état j</u> [C 3]. D.R. Cox et H.D. Miller disent que les deux états <u>communiquent</u> [C 5].

S'il existe un couple $(m, n) > (0, 0)$, tel que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$, le système peut passer de i à j et réciproquement. K.L. Chung dit que les états i et j <u>communiquent</u> [C 3]. D.R.Cox et H.D. Miller disent qu'ils <u>intercommuniquent</u> [C 5].

Dans ce qui suit, on retiendra la terminologie de K.L.Chung.

Un état qui communique avec tout état auquel il mène est appelé un <u>état essentiel</u>; dans le cas contraire, il s'agira d'un <u>état inessentiel</u>.

Un état essentiel ne peut pas mener à un état inessentiel.

2. D.R. Cox et H.D. Miller [C 5] appellent l'état j un <u>état éphémère</u> (ephemeral), si $p_{ij} = 0$ pour tout i. Un tel état ne peut jamais être atteint à partir d'un autre état. Cet état ne peut être occupé par le système qu'au temps initial.

3. L'état i est un <u>état absorbant</u>, si

$$p_{ii} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij} = 0 \text{ pour tout } j \neq i.$$

4. L'état j est appelé <u>récurrent</u> [C 3], [C 5], <u>persistant</u> [G 1](1) ou <u>non-récurrent</u> [C 3], <u>transiant</u> [C 5] [F 3], <u>transitoire</u> [G 1] selon que $f_{jj}^{*} = 1$ ou < 1.

Nous adopterons la terminologie persistant - transitoire.

(1) Dans sa seconde édition, W. Feller [F 3] change "recurrent" en "persistant".

Ainsi définies, les notions de "persistant" et de "transitoire" sont contraires l'une de l'autre et déterminent une partition de l'ensemble des R états: un état est soit persistant, soit transitoire.

On démontre (1), au moyen des fonctions génératrices de $\{f_{jj}^{(n)}\}$ et de $\{p_{jj}^{(n)}\}$, les équivalences :

$$f_{jj}^{*} = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty \iff \text{la série des } p_{jj}^{(n)} \text{ diverge.}$$

$$f_{jj} < 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty \iff \text{la série des } p_{jj}^{(n)} \text{ converge.}$$

Un état éphemère est un état transitoire; un état absorbant est un état persistant.

5. Soit un état i dans lequel le système se trouve initialement et l'ensemble des états j auquel il mène. Si i est essentiel, il existe un couple $(k,l) > (0,0)$, tel que $p_{ij}^{(k)} > 0$ et $p_{ji}^{(l)} > 0$. Ceci implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

et l'état i est persistant.

Si i est inessentiel, i est transitoire (2). Cette alternative vaut pour tout état i du système, sauf pour les états qui ne mènent à aucun autre état. Un tel état ne peut être qu'un état absorbant, car

(1) Voir [F 3] par exemple.

(2) Preuve [C 3], p. 18.

$$\sum_{j=1}^{R} p_{ij} = 1.$$

Or, il est évident qu'un état absorbant est un état persistant. D'autre part, on ne peut pas généraliser la distinction entre états essentiels et inessentiels, au cas où i = j.

De ce raisonnement, il découle que :

un état persistant est, soit un état essentiel, soit un état absorbant;

un état transitoire est un état inessentiel.

Pour cette raison, on négligera par la suite la distinction entre états essentiels et états inessentiels (1).

6. Puisque, dans le cas d'un état persistant $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$, $\{f_{jj}^{(n)}, n=1, 2, \ldots\}$ est une distribution de probabilité (recurrence time distribution of the recurrent state j) et le temps moyen de récurrence, défini précédemment, n'est rien d'autre que le premier moment de cette distribution.

Un état j <u>persistant</u> est dit <u>état nul</u> [G 1], (<u>null recurrent state</u> [C 3] [C 5]), si et seulement si son temps moyen de récurrence (1.2.9) est infini. Si $\mu_j < \infty$, j est dit <u>non nul</u> (<u>positive recurrent state</u> [C 3] [C 5]). Cette distinction, qui n'a un sens que pour les états persistants, constitue une partition de l'ensemble de ces états.

---

(1) Il est cependant intéressant de consulter K.L. Chung à ce sujet [C 3], p. 19; il dit: "Feller does not distinguish between essential and inessential states (...). Feller laments the possible literal interpretation of the word "inessential"; nevertheless the distinction between the "essential" and "inessential" is rather essential".

Nous verrons toutefois à la section 1.7.2.i, que dans une chaîne de Markov finie, aucun état ne peut être nul. Ainsi donc, la distinction précédente n'est utile que dans le cas des chaînes infinies.

7. Un état j est dit <u>périodique</u> de période t, si le système partant de j ne peut revenir en j qu'aux temps t, 2t, 3t, ..., où t est plus grand que 1 et est le plus petit entier à posséder cette propriété.

Pour j périodique de période t, on a donc :

$$p_{jj}^{(n)} \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq kt \\ > 0 & \text{si } n = kt \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Un état ne possédant pas cette propriété est dit <u>non-périodique</u> ou <u>apériodique</u>.

Cette distinction constitue une partition de l'ensemble des états persistants non nuls. Tous les états transitoires et tous les états persistants nuls sont périodiques. En effet, d'une part, un état transitoire ne peut être périodique puisque si j est périodique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty .$$

D'autre part, si j est périodique, on montrera dans la section suivante que :

$$\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(nt)} = t\,\mu_j^{-1} > 0$$

et l'inégalité ne pourrait être vérifiée si, en outre, j était nul ($\mu_j = \infty$).

8. On a fait remarquer qu'un état absorbant est un état persistant (1.3.5).

D'autre part, un état absorbant est un état non nul. En effet,

$$\mu_j = \sum_{n=1} n f_{jj}^{(n)}$$

et si j est absorbant $\begin{cases} f_{jj}^{(1)} = 1 \\ f_{jj}^{(2)} = \dots = f_{jj}^{(n)} = 0 \end{cases}$

et $\mu_j = 1 < \infty$

Finalement, un état absorbant est un état persistant non nul non périodique, car la période t d'un état périodique doit être supérieure à 1.

9. Arrivé à ce stade, il convient de tenter une première classification des états. Cette classification se précisera ultérieurement, en fonction des propriétés qui seront dégagées. On montrera, en outre, que certains de ces états ne peuvent pas se rencontrer dans une chaîne de Markov finie.

Soit un ensemble fini d'états (1)

(i) $E = \{1, 2, \dots, R\}$ R fini

(ii) $E = E_1 \cup E_2$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

où $E_1 = \{\text{états transitoires}\} = \{\text{états inessentiels}\}$

$E_2 = \{\text{états persistants}\} = \left\{\begin{matrix}\text{états essentiels} \\ \text{ou absorbants}\end{matrix}\right\}$

---

(1) La notation utilisée est la notation, désormais classique, de la théorie des ensembles.

(iii) $E_2 = E_3 \cup E_4$

$E_3 \cap E_4 = \emptyset$.

où $E_3 = \{\text{états nuls}\} = \{\emptyset\}$ dans les chaînes finies

$E_4 = \{\text{états non nuls}\}$

(iv) E_4 est composé d'états périodiques et d'états non périodiques.

Soit $E_5 = \{\text{sous ensemble des états périodiques de } E_4\}$

$E_6 = \{\text{sous ensemble des états non périod. de } E_4\}$

On a : $E_5 \cup E_6 = E_4$

$E_5 \cap E_6 = \emptyset$

(v) $\{\text{états périodiques}\} = E_5$

$\{\text{états non périodiques}\} = E_6 \cup E_1 \cup E_3$.

10. On définit un <u>état ergodique</u> comme étant un état <u>persistant non nul non périodique</u>.

Cette définition semble la plus généralement admise (1).

K.L. Chung préfère rejeter la notion d'ergodicité dans ce contexte pour la réserver à la théorie ergodique proprement dite (2).

P. Gordon ne définit pas de qualificatif particulier pour désigner un état persistant non nul non périodique (3).

La plupart des auteurs (4) n'introduisent la notion d'ergo-

---

(1) Voir [F 3] p. 353, [C 5] p. 93.

(2) Voir [C 3] p. 33.

(3) Voir [G 1].

(4) Voir [K 5], [H 3], [K 3], etc...

dicité qu'à un stade ultérieur. C'est pourquoi on étendra cette discussion dans la section 1.9.

Dans les deux sections suivantes, nous énoncerons un certain nombre de propriétés des chaînes infinies, pour deux raisons. Tout d'abord, dans certaines applications économiques, le nombre d'états du système sera suffisamment grand pour que la description correcte de celui-ci se présente sous forme de chaînes infinies. D'autre part, comme les propriétés des chaînes finies ne sont que des cas particuliers des propriétés des chaînes infinies, il est utile de souligner les relations existant entre ces deux types de chaînes de Markov.

1.4. Propriétés des états - Théorèmes limites des chaînes de Markov infinies (1).-

1. Si j est persistant non nul non périodique (ergodique) on a (2)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \mu_j^{-1} f_{ij}^{*} \\ \lim\limits_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = \mu_j^{-1} \end{cases}$$

(1) Ces théorèmes sont parfois appelés théorèmes de Tauber, bien qu'ils n'en soient que des applications.

(2) La démonstration de cette propriété ainsi que de la suivante est reprise dans P. Gordon [G 1] pp. 49 à 60. Il s'inspire de la démonstration de W. Feller, en la détaillant davantage.

2. Si j est <u>périodique de période t</u>, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nt+k)} = t\,\mu_j^{-1} f_{ij}^{*} . \\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(nt)} = t\,\mu_j^{-1} . \end{cases}$$

3. Si j est <u>transitoire</u>, on a (1)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

4. Si j est un <u>état nul</u>, on a (2)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

1.5. <u>Propriété des relations entre états</u> (d'une chaîne infinie).-

On démontre (3) la propriété suivante: d'un état persistant, on ne peut atteindre que des états persistants et tous ces états sont de la même classe: ou bien ils sont tous nuls, ou bien ils sont tous ergodiques, ou bien ils sont tous non nuls périodiques.

---

(1) Voir, par exemple [F 3].

(2) Id.

(3) Id.

1.6. Types de classes d'états.-

Sur base de la propriété précédente, on peut diviser l'ensemble des états en sous-ensembles ou classes, de telle sorte qu'à l'intérieur d'une classe, tous les états soient soit transitoires, soit nuls, soit ergodiques, soit persistants non nuls périodiques. Tout état qui ne communique avec aucun autre état (état absorbant), formera une classe à lui seul. Ainsi, une classe est soit un ensemble de deux ou plusieurs états qui communiquent (1.3.1), soit un état unique.

Une propriété de classe est une propriété dont la possession par un état de la classe entraîne la possession par tous les états de la classe. Par exemple, la propriété d'avoir une période t est une propriété de classe.

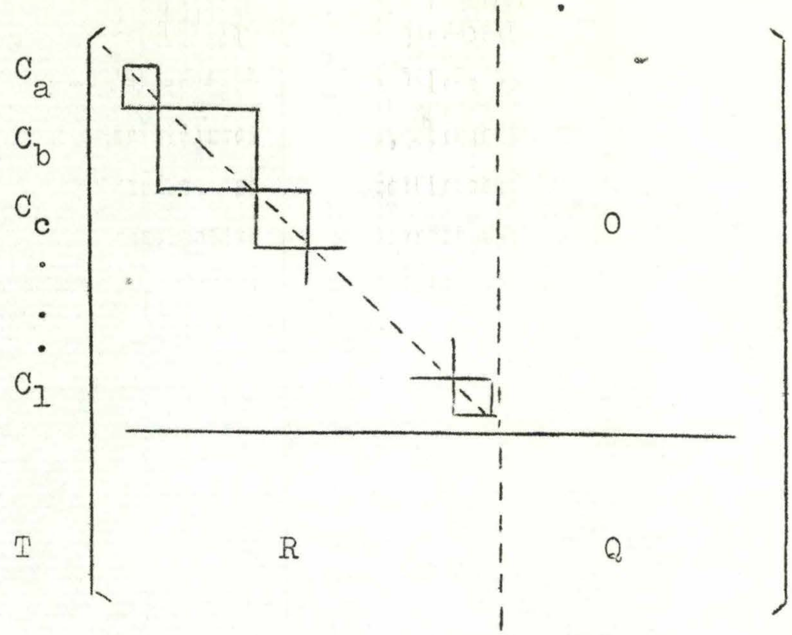
A partir de ce concept, toute chaîne de Markov peut être décomposée en un certain nombre de classes (1) par regroupement des états.

Ces regroupements sont particulièrement utiles dans les applications économiques, ainsi qu'il sera souligné au chapitre 2. Ils permettent, en effet, de dégager clairement quelle est la structure de la matrice de transition et, partant, du phénomène étudié. C'est la raison pour laquelle nous nous étendrons, dans ce qui suit, sur l'étude de ces différentes structures et sur l'examen des propriétés correspondantes qui s'avèrent être les plus intéressantes pour l'économiste.

Appliquant ce regroupement, la matrice de transition peut être ramenée au schéma suivant :

---

(1) Au sens de la théorie des ensembles, on appelle "classes" les sous-ensembles non vides d'un ensemble, deux à deux disjoints et constituant une partition de cet ensemble.



où C_a, C_b, ..., C_l sont les classes d'états persistants (chaque état absorbant se réduisant à une classe, et pour le reste chaque classe se distinguant des autres par le type d'états persistants qu'elle regroupe) et où T est l'ensemble des états transitoires. Dans cette matrice, le bloc Nord-Ouest, qu'on désignera par $[A]$, est une matrice diagonale par blocs; les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, s'ils correspondent à des états absorbants. Le bloc Nord-Est (sous-matrice $[0]$) est une matrice nulle: elle regroupe les probabilités de transition d'un état absorbant ou persistant à un état transitoire. La sous-matrice R est la matrice de transition des états transitoires aux états persistants, la matrice $[Q]$ reprenant les probabilités de transition d'un état transitoire à un autre état transitoire.

La classe C_i est appelée un <u>ensemble</u> clos, parce que chaque état en C_i ne mène qu'aux états en C_i. Chaque classe d'états persistants forme un ensemble clos.

1.7. Types de chaînes.-

On distingue différents types de chaînes de Markov, suivant que celles-ci se présentent sous forme de l'un ou l'autre cas particulier du schéma général présenté à la section précédente.

1. Une chaîne est dite <u>absorbante</u> si elle comprend au moins un état absorbant et s'il est possible d'atteindre le(s) état(s) absorbant(s) <u>à partir de n'importe quel autre état</u>, en une ou plusieurs étapes. Cette définition et la propriété 1.5 entraînent que tous les autres états sont des états transitoires. Dans ce cas, la matrice de transition peut se représenter par (après regroupements) :

$$\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right]$$

où $[I]$ est la matrice identité, dont l'ordre égale le nombre d'états absorbants du système, $[O]$ étant une matrice rectangulaire ne comportant que des éléments nuls, $[Q]$ et $[R]$ comprenant les probabilités de transition des états transitoires, soit vers les états absorbants, soit vers ces mêmes états transitoires. Lorsqu'un état absorbant est atteint, on dit que la chaîne est absorbée. Tous les auteurs sont d'accord en ce qui concerne cette terminologie. Certains se sont consacrés particulièrement à étudier ce type de chaîne de Markov [K 5].

2. Une chaîne est <u>irréductible</u> s'il n'y a pas d'autre ensemble clos que celui de tous les états de la chaîne. Cette définition et la propriété 1.5 entraînent qu'une chaîne irréductible se réduit à une classe particulière d'états persistants.

Cette terminologie est assez communément admise ([F 3], [C 5]...). Certains auteurs cependant ne l'utilisent guère ([K 5], [K 3], ...).

Puisque tous les états appartenant à une même chaîne irréductible appartiennent à une même classe, on pourra distinguer autant de chaînes irréductibles qu'il y a de classes d'états persistants.

(i) Dans une chaîne finie et irréductible, il n'y aura pas d'états nuls. En effet, dans une telle chaîne, si un état est nul, ils le sont tous. Dans ce cas, on aurait, par 1.4.2 et pour tout i, j

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

et $[P]^n$ ne serait pas une matrice stochastique.

On remarquera que cette propriété s'étend aux chaînes de Markov finies en général. En effet, dans pareille chaîne, si i est un état nul, seules les probabilités de passer à un autre état nul peuvent être positives (propriété 1.5). Or, on vient de montrer qu'à la limite, ces probabilités tendent vers zéro. Ceci impliquerait que la i^{me} ligne de $[P]^n$ ne serait composée que de zéros et $[P]^n$ ne serait pas une matrice stochastique.

(ii) Donc, dans une chaîne irréductible finie, tous les états seront soit persistants non nuls périodiques (et de même période t), soit ergodiques.

Si tous les états sont périodiques, on dira que la chaîne est <u>périodique</u> de période t. Dans la matrice de transition correspondante, tous les éléments de la diagonale principale seront nuls. En outre, les états d'une chaîne irréductible périodique de période t peuvent être divisés, de manière unique, en t sous-ensembles "cycliques", mutuellement exclusifs C_1', C_2', ..., C_t', de telle sorte que, si la chaîne occupe initialement un état de C_r', elle occupera, à la première transition, un état de C_{r+1}', pour passer ensuite à C_{r+2}', ..., C_t', C_1', ..., C_{r-1}' et retourner en C_r' à la t^{me} transition.

Si t = 2, la matrice de transition sera de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline X & 0 \end{array}\right]$$

où X désigne un bloc ne comportant que des éléments positifs.

Si t = 3, on a

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & X & 0 \\ \hline 0 & 0 & X \\ \hline X & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et si t = n, on a

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & X & 0 & \ldots \qquad \ldots & 0 \\ \hline
0 & 0 & X & 0 \qquad \ldots & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & X \quad 0 \quad \ldots & 0 \\ \hline
\vdots & & & & \vdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & \ldots \qquad \ldots & X \\ \hline
X & 0 & 0 & \ldots \qquad \ldots & 0
\end{array}\right]$$

(iii) Si tous les états de la chaîne irréductible sont ergodiques, on dit que la chaîne est <u>ergodique</u>. Cette définition est assez rarement admise. On discutera cette question de terminologie dans la section suivante.

3. Enfin faut-il remarquer que, dans une chaîne de Markov finie, tous les états ne peuvent être transitoires. En effet, si j est transitoire, on a, par (1.4.3)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \\ \\ \lim\limits_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Si ces relations étaient vérifiées pour tout j, tous les éléments de $[P]^n$ seraient nuls à partir de n assez grand, et $[P]^n$ ne serait pas une matrice stochastique.

S y n t h è s e

- chaîne de Markov
  - réductible en classes
    - transitoires
    - persistantes
      - nulles: impossible si la chaîne est finie
      - non nulles
        - périodiques
        - <u>ergodiques</u>
  - irréductible
    - transitoire
    - persistante
      - nulle
      - non nulle
        - périodique
        - <u>ergodique</u>

transitoire, nulle: impossible si la chaîne est finie

1.8. Propriétés des différents types de chaînes de Markov finies.-

1. A la section 1.6, on a décomposé le cas général des chaînes non irréductibles en plusieurs ensembles clos d'états persistants et en un ensemble d'états transitoires. Certains de ces ensembles clos se réduisaient à un seul état, appelé état absorbant.

(i) Dans une chaîne de Markov finie et non irréductible, la probabilité que le système atteigne un ensemble clos est égale à 1 (1).

(ii) Le nombre moyen de passages par un état transitoire en partant d'un état transitoire, avant que le système n'atteigne un ensemble clos, est donné par

$$\left[N\right] = \left[I - Q\right]^{-1}$$

(iii) Le nombre moyen d'étapes que le système parcourt avant d'atteindre un ensemble clos est donné par

$$\left[t\right] = \left[N\right]\left[i\right]$$

(iv) La probabilité que le système atteigne tel ensemble clos est

$$\left[B\right] = \left[N\right]\left[R\right]$$

(1) Les preuves de cette propriété et des trois suivantes sont reprises dans /K 5/, pp. 43 à 53.

Ces propriétés sont d'un intérêt particulier, lorsque tous les ensembles clos se réduisent à des états absorbants. On parlera de la probabilité d'absorption, du nombre moyen d'étapes que le système parcourt avant absorption, etc...

2. Puisque, comme nous venons de l'évoquer, la probabilité qu'une chaîne de Markov finie atteigne un ensemble clos est égale à 1, il est raisonnable de s'étendre spécialement sur les propriétés de ces ensembles clos ou, ce qui revient au même, sur les propriétés des chaînes de Markov irréductibles.

On a vu (1.7.2.ii) que, dans une chaîne finie irréductible, tous les états sont soit persistants non nuls périodiques, soit ergodiques.

Dans le cas des chaînes <u>finies</u>, les propriétés (1.4.1 et 2) deviennent

(i) si j est persistant non nul non périodique (<u>ergodique</u>)

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = \mu_j^{-1}$$

(ii) si j est <u>périodique de période t</u>

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(nt+k)} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(nt)} = t\,\mu_j^{-1}$$

c'est-à-dire que $f_{ij}^{*} = 1$ si la chaîne est finie (1).

La propriété (i) ci-dessus est fondamentale en théorie des chaînes de Markov finies. Elle signifie que, dans le cas d'une chaîne ergodique, la matrice de transition $[P]^n$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une matrice dont toutes les lignes sont identiques. En d'autres termes, dans une chaîne fi-

(1) Cette égalité peut être démontrée.

nie ergodique, dès que le nombre d'étapes devient suffisamment grand, la probabilité que le système passe d'un état i à un état j est indépendante de l'état de départ i.

Le vecteur μ_j^{-1} est, en outre, une distribution de probabilité stationnaire, c'est-à-dire que

$$\mu_j^{-1} = \sum_{k=1}^{R} \mu_k^{-1} p_{kj} \qquad (1.8.2.3)$$

En effet, si n tend vers l'infini, (1.2.1) devient

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{R} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

ou

$$u_j^{-1} = \sum_{k=1}^{R} u_k^{-1} p_{kj}$$

équation qui s'écrit en notation matricielle

$$\left[\mu^{-1}\right] = \left[\mu^{-1}\right]\left[P\right] \qquad (1.8.2.4)$$

1.9. La notion de chaîne ergodique.-

Les divergences du vocabulaire utilisé par les auteurs pour désigner le concept de chaîne ergodique doivent se discuter par rapport à la propriété présentée dans la section précédente.

La définition qu'on a adoptée dans ce chapitre correspond à celles de W. Feller et de D.R. Cox et H.D. Miller (1). K.L. Chung, théoricien prudent, esquive le problème et n'associe aucun qualificatif particulier à ce type de chaîne. Il fait simplement remarquer que le théorème démontrant la propriété de la section précédente "a souvent été appelé le "théorème d'ergodicité" des chaînes de Markov. En conformité, poursuit-il,

(1) [F 3], p. 353, [C 5], p. 93. La note (7) dans [F 3], p. 353 peut éclairer (!) ce débat.

"avec l'usage en théorie ergodique, nous réservons ce qualificatif pour un théorème ultérieur" (1). P. Gordon ne parle pas d'ergodicité. Il dit qu'une chaîne de Markov est <u>régulière</u>, si $Q(n)$, distribution de probabilité à l'instant n, tend, pour n tendant vers l'infini, vers une limite Q^* indépendante de $Q(0)$, distribution initiale (2). Cette définition implique, en vertu de la propriété précédente, que les chaînes ergodiques sont régulières, sans que les chaînes régulières soient toutes ergodiques, certaines pouvant être périodiques. En d'autres termes, si l'on accepte la définition d'une chaîne de Markov finie présentée à la section 1.1, il y a équivalence entre la définition de chaîne régulière (au sens de Gordon) et celle de chaîne irréductible.

P. Gordon fait, en outre, un rapprochement entre la théorie des graphes et la théorie des chaînes de Markov, montrant l'équivalence de certaines notions et il tente ainsi de jeter un pont entre les deux théories. Cette approche semble extrêmement fructueuse (elle avait d'ailleurs été préconisée par Kaufmann (3)) et digne d'être davantage élaborée. D'autres auteurs définissent une chaîne régulière, comme étant une chaîne de Markov, dont la matrice de transition correspondante tend vers une matrice stochastique $[P]^n$ ne comportant que des éléments strictement positifs. Cette terminologie équivaut à la notion de chaîne ergodique, telle qu'elle a été définie à la section 1.7. En effet, on a vu que si la chaîne est ergodique, tous les éléments de $[P]^n$ tendent, quand n tend vers l'infini, vers $\mu_j^{-1} > 0$. La réciproque est vraie, car si, à la limite

(1) [C 3], p. 33.
(2) [G 1], p. 15.
(3) [K 3], p. 387.

$p_{ij}^{(n)} > 0$, quels que soient i et j , ces états ne peuvent être qu'ergodiques.

Kaufmann (1) note que la terminologie utilisée par les différents auteurs est aussi diverse qu'imparfaite. Dans ses "Méthodes et Modèles", il adopte, sous réserve d'une présentation plus rigoureuse, s'appuyant sur la théorie des graphes (dont il annonce l'élaboration dans un ouvrage à publier en collaboration avec R. Gruon: "La programmation dynamique")(2), la terminologie de R.A. Howard (3). Celui-ci dit qu'une chaîne est ergodique si la matrice $[P]^n$, quand n tend vers l'infini, ne comporte aucun élément nul, qu'elle est complètement ergodique, si elle répond à la condition de régularité de P. Gordon. Cette présentation semble peu rigoureuse. En effet, si $\lim_{n \to \infty} [P]^n$ ne comporte aucun élément nul, la chaîne ne peut être périodique. Si, par contre, la chaîne est "complètement ergodique" (au sens de Howard) ou "régulière" (au sens de Gordon), elle peut être périodique et $\lim_{n \to \infty} [P]^n$ comportera toujours certains éléments nuls.

Kemeny (4), de son côté, adopte comme point de départ la théorie des ensembles et définit un ensemble ergodique. "Les éléments minimaux d'une classe d'équivalence partiellement ordonnée sont appelés - dit-il - des <u>ensembles ergodiques</u>. Les

---

(1) [K 3], p. 387.

(2) Cet ouvrage a paru depuis lors [K 4] et les auteurs y définissent une chaîne ergodique comme étant une chaîne non périodique répondant à la propriété $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \mu_j^{-1} > 0$.
Cette définition rejoint donc la notion de chaîne ergodique, telle que nous l'avons adoptée au cours de ce chapitre; cette équivalence a été commentée au paragraphe précédent.

(3) [H 3].

(4) Voir [K 5].

autres éléments sont appelés des <u>ensembles transitoires</u>." (Un élément a de U est appelé <u>élément minimal</u> si $a\ T\ x$ implique $x\ T\ a$, pour tout $x \in U$, où T représente la relation d'ordre partiel). Appliquant ces notions à la théorie des chaînes de Markov, il vient: une chaîne est ergodique si elle est composée d'un ensemble ergodique. Si l'ensemble ergodique est régulier, la chaîne est régulière; si l'ensemble ergodique est cyclique, la chaîne est cyclique de période t.

En guise de conclusion de cette discussion, on reprend ci-dessous, sous forme schématique, les différentes terminologies utilisées par les principaux auteurs. On a tâché d'établir des équivalences entre celles-ci; ces équivalences se rapportent évidemment aux chaînes de Markov finies, telles qu'elles ont été définies à la section 1.1.

<u>TABLEAU 1.9.1</u>

Comparaison des différentes définitions que les principaux auteurs donnent d'une chaîne de Markov ergodique (1).

Référence bibliographique	<u>Chaîne irréductible</u>: il n'y a pas d'autre ensemble clos que l'ensemble de tous les états de la chaîne.	<u>Chaîne ergodique</u>: chaîne irréductible dont tous les états sont ergodiques
[F 3]	chaîne irréductible	chaîne ergodique
[K 5]	chaîne ergodique	chaîne régulière
[G 1]	chaîne régulière	-
[H 3]	chaîne complètement ergodique	chaîne ergodique
[K 3]	chaîne complètement ergodique	chaîne ergodique
[C 3]	-	-
[C 5]	chaîne irréductible	chaîne ergodique
[K 4]	chaîne irréductible	chaîne ergodique

(1) Rappelons que les équivalences résumées dans ce tableau ne sont valables que par rapport à la définition de chaînes de Markov finies que nous avons adoptée.

L'établissement d'une terminologie précise et rigoureuse devrait se faire en prenant comme point de départ, ainsi que l'ont esquissé certains auteurs, un terrain stable, telles la théorie des ensembles ou la théorie des graphes.

1.10. Solution pratique de deux problèmes.-

Dans cette section, nous dégagerons deux méthodes de calcul permettant de résoudre facilement des problèmes qui se posent immédiatement dans presque toutes les applications économiques des chaînes de Markov. Il s'agit, d'une part, du calcul du vecteur de probabilités stationnaires qui représente la limite vers laquelle tend un processus en chaînes de Markov ergodiques et, d'autre part, du temps qu'il faut au processus pour que cette limite soit atteinte, à un certain niveau de convergence donné.

1.10.1. Calcul du vecteur de probabilités stationnaires

Si la matrice $[P]$ est ergodique, on a vu que $[P]^n$ tend, lorsque n tend vers l'infini, vers une matrice dont toutes les lignes sont égales au vecteur $[u^{-1}]$, vecteur de probabilités stationnaires, solution de l'équation

$$[\mu^{-1}] = [\mu^{-1}]\,[P] \tag{1.10.1.1}$$

qui peut s'écrire

$$[\mu^{-1}][P - I] = [0]. \tag{1.10.1.2}$$

Posons:

$$[P - I] = [D].$$

$[D]$ est de rang R-1. En effet, si la chaîne est ergodique, il faut que l'équation (1.10.1.1) ne comporte qu'une solution $k\,[\mu^{-1}]$ unique (où k est une constante arbitraire). Si cela est vrai, k sera déterminé par la relation

$$\sum_{j=1}^{R} \mu_j^{-1} = 1 \tag{1.10.1.3}$$

et les valeurs absolues des μ_j^{-1} seront déterminées univoquement.

Si $[D]$ était de rang R, tous les μ_j^{-1} seraient nuls, ce qui est incompatible avec (1.10.1.3). Si $[D]$ était de rang strictement inférieur à R-1, les μ_j^{-1} ne pourraient être déterminés de manière unique, malgré la condition (1.10.1.3).

Puisque $[D]$ est de rang R-1, la solution de (1.10.1.1) est

$$k\mu_j^{-1} = D_{jv} \tag{1.10.1.4}$$

où $j = 1, 2, \ldots, R$, quel que soit $v = 1, 2, \ldots, R$ et où D_{jv} est le cofacteur de l'élément d_{jv} de $[D]$.

La condition (1.10.1.3) définit

$$k = \sum_{j=1}^{R} D_{jv} \quad (1.10.1.5)$$

En outre, (1.10.1.4) implique que D_{jv} est indépendant de v. D'où $D_{jv} = D_{jj}$ (1.10.1.6)

Eliminant D_{jv} entre (1.10.1.5) et (1.10.1.6), il vient

$$\mu_j^{-1} = \frac{D_{jj}}{\sum_{j=1}^{R} D_{jj}} \quad (1.10.1.7)$$

1.10.2. Calcul du temps de convergence

On définit le temps de convergence comme étant le nombre n_{ij} d'étapes qu'il faut pour que la probabilité de transition $p_{ij}^{(n)}$ en n étapes atteigne un certain niveau de convergence C par rapport à l'élément correspondant du vecteur de probabilités stationnaires. Il sera donc défini (1) par la relation :

$$\min_{n_{ij}} \left| p_{ij}^{(n_{ij})} - \mu_j^{-1} \right| \leq C_{ij} \quad (1.10.2.1)$$

---

(1) On peut définir le temps de convergence de multiples façons et, par exemple aussi, par les relations

$$\min_{n_{ij}} \frac{\mu_j^{-1}}{p_{ij}^{(n_{ij})}} \leq C_{ij} \quad \text{si} \quad \mu_j^{-1} \geq p_{ij}^{(n)}$$

$$\leq \frac{1}{C_{ij}} \quad \text{si} \quad \mu_j^{-1} \leq p_{ij}^{(n)}$$

Nous avons cependant préféré la définition (1.10.2.1) parce que, exprimée en valeurs absolues, elle ne doit pas tenir compte des oscillations de $p_{ij}^{(n_{ij})}$ autour de μ_j^{-1}. Cette définition convient d'ailleurs mieux aux développements qui suivent.

On peut démontrer (1) que

$$\left[P\right]^n = \{i\}\left[u^{-1}\right] + a^n \left[T\right] \qquad (1.10.2.2)$$

cette relation ayant les propriétés

$$\begin{cases} \{i\}\left[u^{-1}\right] + \left[T\right] = \left[I\right] & \text{ce qui permet de calculer } \left[T\right] \text{ puisque } \left[u^{-1}\right] \text{ est connu par la méthode de calcul exposée dans la section précédente.} \\ a = \text{dét } \left[P\right], & \text{ce qui comporte } 0 < |a| < 1. \end{cases}$$

Il vient donc

$$\left|p_{ij}^{(n)} - \mu_j^{-1}\right| = |a|^n \left|t_{ij}\right| \qquad (1.10.2.3)$$

et en utilisant la relation (1.10.2.1), le temps de convergence n_{ij} est défini par

$$\min_{n_{ij}} |a|^{n_{ij}} |t_{ij}| \leqslant C_{ij} \qquad (1.10.2.4)$$

ou encore, en exigeant que le niveau de convergence soit le même pour tout élément p_{ij} de la matrice de transition

$$\min_{n_{ij}} |a|^{n_{ij}} |t_{ij}| \leqslant C \qquad (1.10.2.5)$$

et n_{ij} est finalement solution de l'équation

$$|a|^{n_{ij}} |t_{ij}| = C$$

soit

$$n_{ij} = \frac{1}{\log|a|} \left(\log C - \log|t_{ij}|\right) \qquad (1.10.2.6)$$

En fait, on voit par l'équation (1.10.2.6) que, pratiquement, on peut faire correspondre une valeur n_{ij} à chaque

---

(1) R.A. Howard démontre cette formule dans [H 3] au moyen de la transformée en Z.

valeur t_{ij}, l'ensemble de ces différentes valeurs pouvant être regroupé en une matrice carrée $[N]$ d'ordre R. On obtient donc finalement R^2 estimations du temps de convergence. Celles-ci seront cependant toutes d'un même ordre de grandeur et d'après la nature du cas d'application, on choisira, soit le n_{ij} minimal, soit le n_{ij} maximal, soit, par exemple, une moyenne arithmétique simple des n_{ij}, comme valeur du temps de convergence du système.

Conclusions

Nous nous sommes efforcés, au cours de ce chapitre, de définir les concepts qui seront utilisés par la suite. Un effort de classification a, d'autre part, été poursuivi, en ce qui concerne les différents types de probabilité entrant en jeu, les différents types d'états qu'une chaîne de Markov finie peut comporter et les différents types de chaînes de Markov finies. Certaines définitions, à première vue divergentes, se sont avérées être équivalentes. Les propriétés fondamentales ont été évoquées. Des points d'interrogation subsistent certes (notamment en ce qui concerne la notion d'ergodicité), mais l'objectif de ce chapitre était plus de les poser clairement que de les lever.

Nous avons également dégagé les propriétés qui correspondent à chaque type de chaîne. La propriété fondamentale, qui sera constamment utilisée par la suite, caractérise les chaînes ergodiques (auxquelles se ramène la plupart des applications) et implique que, dès que le nombre d'étapes devient suffisamment grand, la probabilité que le système passe d'un état à un autre est indépendante de l'état de départ. D'autre part, dans certains cas pratiques, la chaîne sera absorbante ou, plus gé- néralement, réductible et comportant des ensembles clos; les propriétés correspondantes sont également intéressantes du point de vue de leur interprétation économique. Finalement, des moyens de calcul, notamment du temps de convergence et du vecteur de probabilités stationnaires, fournissent aisément des résultats chiffrés.

Dans le chapitre suivant, cet effort conceptuel sera orienté vers l'application économique et, dans ce but, nous tâcherons d'y marquer le passage du niveau spéculatif au niveau opératoire.

Chapitre 2

LES APPLICATIONS ECONOMIQUES DES CHAINES DE MARKOV

CHAPITRE 2 - LES APPLICATIONS ECONOMIQUES DES CHAINES DE MARKOV

Introduction

Dans un second chapitre, nous esquisserons comment la théorie développée précédemment a été et peut être utilisée dans le domaine économique. Si la technique des chaînes de Markov a servi quelquefois de base à des analyses d'ordre macroéconomique, elle est cependant plus typiquement un des instruments mathématiques mis à la disposition du chercheur opérationnel au sein de la firme. Bien que les applications concrètes de cette technique, caractérisées par un traitement rigoureusement spécifique et par des résultats réellement opératoires, soient aujourd'hui encore assez sporadiques, de nombreux cas d'application - principalement dans le domaine de la gestion d'entreprise - ont été proposés et des modèles théoriques ont été construits.

Nous nous proposons, dans une première partie, de développer, in extenso, un exemple-type d'utilisation courante de la théorie des chaînes de Markov dans la gestion d'entreprise et dans la recherche de marché. Il s'agit de la description, par un processus en chaîne, du comportement du consommateur qui se trouve devoir faire un choix entre un certain nombre de produits substituables. Notre but, autant que possible, est d'y détailler une application, sans toutefois entrer dans les modalités qui prendraient la dimension de cas d'espèce, et de donner ainsi une interprétation économique particulière des concepts théoriques présentés dans le chapitre précédent.

Une seconde partie résumera ensuite, de manière très schématique, les principales études empiriques basées sur un modèle stochastique en chaîne de Markov. Trois domaines d'application y seront distingués: modèles de répartition macroéconomiques, modèles de développement régional et de commerce interrégional et modèles microéconomiques relevant principalement de la gestion de l'entreprise.

2.A. Dynamique de la préférence des consommateurs pour certaines marques d'une catégorie déterminée de produits

2.A.1. Les différentes marques d'une catégorie de produits considérées comme une chaîne.-

Le consommateur qui se rend au marché dans l'intention de se procurer un certain produit, y trouve un ensemble de marques différentes parmi lesquelles il devra faire un choix. Supposons que le produit dont il s'agit soit un bien non durable, comme, par exemple, une poudre à lessiver ou une margarine: un tel bien est, d'une part, consommé au cours d'une période de consommation relativement courte et fixe, et, d'autre part, présenté sous des marques et des qualités très étroitement substituables. Dans ces hypothèses, notre consommateur devra choisir, disons chaque semaine (s'il consomme le produit en une semaine), parmi l'éventail qui lui est présenté, une marque et, éventuellement, une qualité, et ce choix ne sera pas nécessairement toujours le même. A partir de l'observation de son comportement pendant une période assez longue, on peut décrire celui-ci par une chaîne de Markov, dont les probabilités de transition (calculées à partir de la série temporelle observée) expriment quelle est la vraisemblance que le consommateur, ayant opté pour telle marque lors de son dernier achat, choisira telle autre (ou la même) cette fois-ci. Cette méthode, toutefois, présente un double inconvénient. Tout d'abord, le consommateur considéré et observé, ne peut en aucune manière être identifié à l'ensemble des consommateurs achetant le produit. Le comportement de cet ensemble d'acheteurs sera mieux, bien qu'imparfaitement, approché par une certaine agrégation des comportements des consommateurs individuels. Le second inconvénient, tout aussi grave du point de vue opératoire que le précédent, est que, pour établir les probabilités de transition, il faudrait observer le consommateur-cobaye pendant une période de temps trop longue pour que tous les éléments exogènes puissent être considérés comme invariants et sans influence sur le processus lui-même; pendant une période de temps trop longue aussi pour que quelque action préventive utile puisse être tirée de l'étude.

Afin d'éviter ce double inconvénient, on substitue à la méthode précédente (analyse historique ou "time-series analysis") qui consiste à observer la réalisation unique du processus stochastique à des moments différents du temps, la méthode dite d'analyse instantanée (ou "cross section analysis"). Celle-ci consiste à étudier le comportement d'un échantillon représentatif de l'ensemble des consommateurs du produit, à un moment du temps, et d'en tirer une estimation aussi statistiquement satisfaisante que possible des paramètres du problème, c'est-à-dire des probabilités de transition d'une marque à une autre. L'estimation pourra probablement encore être améliorée en combinant les deux méthodes précédentes: dans ce but, on observera le comportement d'un échantillon de consommateurs au cours d'une période de temps raisonnablement courte (pour que l'objection qui a été faite à la méthode historique n'entre pas en ligne de compte). Cette méthode est appelée analyse complète.

Soit un produit qui est vendu sur le marché sous trois marques différentes A, B et C. Afin d'estimer les probabilités de transition, on a construit un échantillon de 1.000 consommateurs. Leur comportement d'une semaine à l'autre pourrait, par exemple, être schématisé de la manière suivante:

	marques	deuxième semaine			
		A	B	C	Total
première	A	125	75	50	250
	B	75	100	75	250
semaine	C	50	100	350	500
Total		250	275	475	1.000

On lit dans ce tableau que, parmi les 1.000 consommateurs, 500 ont acheté, au cours de la première semaine, le produit C. Parmi ces 500 consommateurs, 50 ont acheté le produit A au cours de la deuxième semaine, 100 ont acheté le produit B et 350 sont restés fidèles au produit C. Et ainsi de suite. A partir de ces informations, la matrice de transition peut (1) s'établir comme suit:

(1) Ces estimateurs des paramètres sont les estimateurs obtenus par la maximisation de la fonction de vraisemblance ("likelihood function"). L'application de cette méthode pour l'estimation des paramètres dans une chaîne de Markov est sujette, nous semble-t-il, à deux objections. La première est que la fonction de vraisemblance retenue, en l'occurrence la distribution multinomiale, n'est qu'une approximation de la distribution réelle des paramètres, donnée par la formule de Whittle (approximation à un facteur multiplicatif près). En second lieu, si les propriétés des estimateurs de maximum de vraisemblance sont remarquables, celles-ci ne sont vérifiées qu'à partir d'échantillons assez grands, ce qui n'est que rarement le cas pour les applications économiques. D'autres estimateurs ont été dégagés tels que: estimateurs · moindres carrés, estimateurs par moindres carrés sous condition et pondérés... Ce problème d'estimation des paramètres, ainsi que celui des tests statistiques en matière de chaînes de Markov constituent, aujourd'hui encore, un domaine de recherche, où la plus grande partie du travail reste à faire. Patrick Billingsley fait le point en cette matière, dans son article "Statistical Methods in Markov Chains" in "The Annals of Mathematical Statistics" (U.S.), Vol.32(1961), nº 1, pp. 12 à 40.

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ B & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ C & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{array} \qquad (2.A.1.1)$$

Il convient de remarquer qu'un des états de la chaîne ainsi définie sera l'état résiduel de "non-consommation" du produit auquel on s'intéresse: il faut, en effet, que les consommateurs du produit aient la possibilité de ne plus en consommer la semaine suivante et réciproquement, ceux qui n'en ont pas consommé la première semaine doivent avoir l'occasion d'en consommer la seconde semaine.

Ainsi décrit, le modèle souffre d'un certain nombre de faiblesses qu'il faut souligner.

Les hypothèses théoriques du premier chapitre doivent être satisfaites.

Il faut tout d'abord que le temps qui sépare les différents achats soit relativement égal, quel que soit cet achat (c'est-à-dire que chacune des marques se consomme également vite) et que les différents états soient des marques différentes d'un même produit ou de produits étroitement substituables. Si ces conditions ne sont pas remplies, le modèle précédent ne décrira pas de manière satisfaisante le comportement des consommateurs.

Il faut ensuite que la matrice de transition soit stable dans le temps (homogénéité dans le temps). Cette hypothèse peut être fort irréaliste puisqu'elle suppose, non seulement que l'effort publicitaire poursuivi pour chacune des marques ainsi que les résultats de cette publicité, croissent de la même manière (de telle sorte que l'effet de ces éléments sur les probabilités de transition d'une marque à une autre soit homothétique), mais aussi que l'influence de toutes les autres forces économiques soit neutre. Cette condition appuie encore la nécessité de ne considérer que des substituts proches.

Enfin, les chaînes de Markov sont d'ordre un. Cela signifie que la probabilité de passer d'une marque à une autre est absolument indépendante du comportement passé et en particulier du fait que le consommateur consomme le produit depuis toujours ou depuis une semaine seulement. Le réalisme de cette hypothèse a été fortement discuté (1).

Il faut souligner finalement que la précision du modèle sera améliorée si la classification des états est plus fine. On pourrait ainsi concevoir un modèle dont les états seraient fonction, d'une part, non seulement des différentes marques d'un produit, mais également des différentes sous-marques de ces marques, et même éventuellement des différentes qualités existant à l'intérieur de chacune de ces sous-marques, et, d'autre part, également des différents types de consommateurs (par exemple: fidèles, instables, infidèles). Toutefois, il est évident que si une telle désagrégation du comportement du consommateur amène une précision croissante du modèle (ce qui, d'ailleurs, n'est pas nécessairement vrai, car il peut se produire que des éléments aléatoires, qui se neutralisent à partir d'un certain niveau d'agrégation, perturbent un modèle par trop désagrégé), elle entraîne en même temps un coût croissant en ce qui concerne la récolte des données. Une solution intermédiaire optimale devra être établie dans chaque cas d'espèce.

2.A.2. Signification économique de la matrice de transition suivant sa structure.-

Si tous les consommateurs sont parfaitement fidèles,

---

(1) Voir [H 1] pp. 31 à 34.

tous les états seront des états absorbants et la matrice sera égale à $\left[\delta_{ij}\right]$ où δ_{ij} est le δ de Kronecker.

Si, au contraire, tous les consommateurs sont parfaitement infidèles, on aura $\left[p_{ij}\right] = \left[1/R\right]$ où R est le nombre de marques considérées.

Un problème important est de découvrir tous les ensembles clos. Il est toutefois clair que si la méthode d'estimation précédente est utilisée pour calculer les probabilités de transition, la matrice de transition ne comportera aucun élément nul et la chaîne ne possédera ni état absorbant, ni ensemble clos au sens strict: dans la plupart des cas, en effet, il y a toujours une certaine probabilité, si minime soit-elle, qu'un consommateur passe d'une certaine marque à chacune des autres marques. Toutes ces chaînes sont donc en fait ergodiques. Il n'est cependant pas inutile d'assimiler les très faibles probabilités à zéro et de restandardiser les autres éléments de chaque ligne par rapport à l'unité afin de découvrir les ensembles de marques qui ont tendance à former des ensembles clos ou les marques qui ont tendance à constituer des états absorbants.

En regroupant, par cette manipulation, les différentes marques en "ensembles clos" et "états absorbants", on parvient à dégager quelles sont les marques qui s'"alimentent" les unes les autres. Cette décomposition signifie, en effet, que dès qu'un consommateur a opté pour une marque faisant partie d'un ensemble clos, il ne choisira plus à l'avenir que cette même marque ou les autres marques du même ensemble clos. La connaissance de cette décomposition est donc d'un intérêt appréciable pour la firme, par le fait, non seulement qu'elle lui donnera une certaine idée du marché, mais aussi parce qu'elle l'incitera vers une action déterminée qui serait, par exemple, la réunion de ces propres produits dans un même ensemble clos, situation qui lui conférerait un monopole sur une partie du marché au moins.

Pour des raisons analogues, il est important de découvrir quels sont les états transitoires.

D'autre part, et en utilisant la désagrégation proposée plus haut,il est intéressant de savoir dans quelles proportions une marque déterminée est achetée par des acheteurs "fidèles" ou par des acheteurs "infidèles". En effet, si la plupart des acheteurs sont fidèles, un effort de publicité aura moins d'effet que si les acheteurs sont infidèles.

Ces remarques suggèrent l'utilité d'une première analyse relativement sommaire de la matrice de transition. Si des conclusions peuvent en être tirées, une analyse plus fine - sur base, par exemple, d'une désagrégation - sera poursuivie, afin de confirmer et de préciser ces premières conclusions, qui peuvent alors aboutir à la modification de la politique de marché poursuivie par la firme.

2.A.3. Prédictions à partir d'une chaîne de Markov.-

Une première étude ayant été réalisée, certaines décisions ayant éventuellement été prises à ce stade, il sera probablement utile à la firme d'utiliser le modèle élaboré pour prédire l'évolution future du marché. Dans ce domaine, plusieurs problèmes sont susceptibles de l'intéresser.

(i) On peut se demander quelle est la probabilité qu'après un certain nombre de semaines, le consommateur achète pour la première fois telle marque, ou qu'après un certain nombre de semaines, ce consommateur achète de nouveau, pour la première fois, la marque qu'il a achetée la semaine dernière. Ces probabilités seront données par les éléments $f_{ij}^{(n)}$ de la matrice $\left[F^{(n)}\right]$, lesquels se calculent par la formule (1.2.14). Dans le cas du produit vendu sous trois marques différentes, dont la matrice de transition est la matrice (2.A.1.1), on trouve

$$\left[F^{(1)}\right] = \left[P\right] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(2)}\right] = \left[P\right]\left[G^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,11 & 0,19 & 0,19 \\ 0,15 & 0,15 & 0,18 \\ 0,13 & 0,17 & 0,08 \end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(3)}\right] = \left[P\right]\left[G^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00 & 0,19 & 0,19 \\ 0,15 & 0,00 & 0,18 \\ 0,13 & 0,17 & 0,00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,071 & 0,129 & 0,149 \\ 0,099 & 0,108 & 0,129 \\ 0,121 & 0,138 & 0,055 \end{bmatrix}$$

etc...

Cette formulation peut également fournir une réponse à la question de savoir combien de semaines il faudra attendre au plus, pour que l'acheteur revienne acheter la même marque (ou vienne pour la première fois acheter telle marque) avec une probabilité supérieure à un minimum fixé. Ceci pourrait mener à l'établissement de critères de rentabilité future du produit.

(ii) Si, à la suite d'un examen approfondi de la structure du marché et de la matrice de transition, on arrive à la conclusion que cette dernière comporte un ou plusieurs ensembles clos (ou éventuellement états absorbants), il est intéressant de savoir quel est le nombre moyen de semaines avant que tel ensemble de marques constituant un ensemble clos, ou telle marque correspondant à un état absorbant, se rende maître de tout le marché. Les réponses à ces questions ont été évoquées de manière formelle au chapitre 1.

Si, dans l'exemple précédent, on conclut d'une première analyse que la marque C correspond à un état absorbant, la matrice de transition deviendra:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Appliquant les formules du chapitre 1 à ce cas, on trouve que

(a) le nombre moyen de semaines que chacun des produits A et B restent sur le marché avant que celui-ci ne soit complètement absorbé par le produit C, en fonction de l'état de départ (c'est-à-dire en fonction de l'hypothèse que, soit le produit A, soit le produit B était le seul à se présenter sur le marché à l'époque initiale), est donné par:

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - Q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,857 & 1,424 \\ 1,424 & 2,381 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ s'interprètent de la manière suivante: supposons qu'à l'époque initiale, seul le produit A se présente sur le marché. Les éléments de la première ligne de la matrice $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ correspondent à cette hypothèse et signifient respectivement que le produit A restera 2,857 semaines sur le marché avant que celui-ci ne soit complètement absorbé par le produit C et que le produit B qui, entretemps se sera présenté sur le marché, y demeurera pendant 1,424 semaines avant l'absorption de celui-ci par le produit C. Si, hypothèse inverse, seul le produit B est présent sur le marché à l'époque initiale, la seconde ligne de la matrice $\left[N\right]$ s'interprète de manière analogue.

(b) le nombre moyen de semaines avant que la marque C n'"avale" la totalité du marché, dans chacune des hypothèses précédentes, est égal à:

$$\left\{t\right\} = \left[N\right]\left\{i\right\} = \begin{bmatrix} 2,857 & 1,424 \\ 1,424 & 2,381 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,281 \\ 3,805 \end{Bmatrix}$$

(c) la probabilité que le marché soit absorbé par la marque C est évidemment:

$$\left[B\right] = \left[N\right]\left[R\right] = \begin{bmatrix} 2,857 & 1,424 \\ 1,424 & 2,381 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,9986 \\ 0,9991 \end{Bmatrix} = \left\{i\right\}$$

ce qui correspond à la propriété énoncée précédemment (1.9.1) (la différence avec le résultat théorique étant due aux arrondis). Cette dernière question n'a de signification que si le marché comporte plusieurs marques absorbantes ou plusieurs ensembles clos.

Chacun de ces résultats peut être précisé, par pondération, en fonction des parts de marché occupées initialement par chacune des trois marques.

Ces relations ont une valeur certaine dans l'élaboration de plans de promotion de produits, de publicité ou d'introduction de nouveaux produits. Elles démontrent également que certaines marques demandent une période plus longue que d'autres avant de fournir certains profits à la firme. Il est évident que la firme préférera, du moins au départ, se concentrer sur des produits qui auront tendance à absorber le marché plus rapidement. D'autre part, si plusieurs marques ont des temps d'absorption similaires et, par exemple, considérablement plus courts ou plus longs que ceux des autres marques, ce fait suggère qu'il existe une relation entre ces marques et que des politiques analogues pourraient être adoptées vis-à-vis des consommateurs de chacune de ces marques.

(iii) L'élément le plus intéressant à prédire est, sans doute, la structure stable de marché vers laquelle tend le marché actuel. En termes de théorie des chaînes de Markov, ceci correspond à calculer le vecteur de probabilités stationnaires.

A titre d'exemple, on a calculé celui-ci pour la matrice de transition (2.A.1.1) au moyen de la formule (1.10.1.6) démontrée au chapitre 1.

$$\mu_j^{-1} = \frac{D_{jj}}{\sum_j D_{jj}}$$

où $$[D] = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & -0,3 \end{bmatrix}$$

et il vient:

$$\mu_1^{-1} = \frac{D_{11}}{\sum_j D_{jj}} = \frac{0,12}{0,46} = 0,261$$

$$\mu_2^{-1} = \frac{D_{22}}{\sum_j D_{jj}} = \frac{0,13}{0,46} = 0,283$$

$$\mu_3^{-1} = \frac{D_{33}}{\sum_j D_{jj}} = \frac{0,21}{0,46} = 0,456.$$

ce qui implique qu'après une période assez longue, la marque C occupera environ 50 % du marché total, les deux autres marques se partageant l'autre moitié à parts égales.

(iv) Une autre information importante est de savoir en combien de temps cette situation limite sera approchée. Il s'agit de calculer le temps de convergence. L'importance de cette information est due au fait que ce temps de convergence constitue un élément de coût pour la firme. Il peut également fournir des indications concernant la politique à suivre: s'il est relativement long, la firme pourra tâcher de l'abréger par une mesure de politique qui serait, par exemple, celle de lancer une campagne publicitaire en faveur de ses produits. Une telle décision ne réduira pas nécessairement le coût, puisqu'elle substituera un coût de publicité à un coût d'attente; elle aura cependant l'avantage de contrer une action éventuelle des concurrents - d'autant plus vraisemblable que le temps de convergence est plus long - qui aurait pour effet de modifier les données du modèle, ce qui invaliderait les conclusions de celui-ci.

Voyons quel sera le temps de convergence dans le cas de l'exemple que nous avons choisi pour illustrer ces commentaires. On le calcule au moyen de la formule (1.10.2.6):

$$\left[N\right] = \left[n_{ij}\right]$$

où $n_{ij} = \frac{1}{\log|a|} (\log C - \log |t_{ij}|)$

où

- $|a|$ est la vâleur absolue du déterminant de la matrice (2.A.1.1), soit $a = 0{,}060$
- C est le niveau de convergence souhaité, soit par exemple $C = 5.10^{-7}$
- $$\left[T\right] = \left[t_{ij}\right] = \left[I - S\right] = \begin{bmatrix} 0{,}739 & 0{,}283 & 0{,}456 \\ 0{,}261 & 0{,}717 & 0{,}456 \\ 0{,}261 & 0{,}283 & 0{,}544 \end{bmatrix}$$

et, après calcul, on trouve les temps de convergence correspondant aux éléments de la matrice (2.A.1.1):

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,050 & 4,708 & 4,878 \\ 4,680 & 5,039 & 4,878 \\ 4,680 & 4,708 & 4,941 \end{bmatrix}$$

On choisira pour mesurer ce temps de convergence, soit l'élément le plus grand de cette matrice (5,050), soit l'élément le plus petit (4,680), soit la moyenne

$$\frac{\sum_i \sum_j n_{ij}}{R^2} = 4,840$$

Si on choisit la première mesure, cela signifie que <u>tous</u> les éléments de $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix}^n$ auront atteint la distribution de probabilités stationnaires au niveau de convergence de 5.10^{-7} , si on choisit la seconde mesure, <u>un seul</u> élément l'aura atteint à ce degré de convergence et, enfin, si on utilise la troisième mesure, on dégagera le <u>temps de convergence moyen</u> pour l'ensemble des éléments de la matrice $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$. Dans l'exemple proposé, il est clair que le problème de ce choix ne se pose pas vraiment, puisqu'on lit immédiatement que, pour atteindre la répartition stable du marché, il faudra attendre environ cinq semaines. Dans d'autres cas, par contre, il peut se produire que les différents éléments de la matrice $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ diffèrent davantage les uns des autres, et alors (si, par exemple, ils diffèrent entre eux de plus d'une unité),il faudra faire un choix entre les différentes possibilités de mesurer le temps de convergence.

(v) Nous ne ferons que remarquer, pour mémoire, que dans le cas où l'estimation de la matrice de transition approcherait un schéma périodique, des analyses analogues peuvent être poursuivies.

2.A.4. Introduction d'un nouveau produit.-

Lorsqu'une firme se propose de lancer un nouveau produit sur un marché, elle aura pour premier souci de se demander si ce nouveau produit sera ou non rentable. Pour répondre à cette question et afin de prévoir la rentabilité future du nouveau produit, on "teste" souvent celui-ci sur une partie du marché total, laquelle doit représenter, au mieux, un échantillon parfaitement représentatif de ce marché total. Au cours de ce test, il faudra utiliser des techniques susceptibles de donner des résultats suffisamment sûrs, rapides et continus pour que des conclusions valables puissent en être tirées, quant au comportement futur du produit sur le grand marché et cela dans un délai minimum. Parmi ces techniques, la théorie des chaînes de Markov occupe une place utile.

Dans [L 3], B. Lipstein donne les résultats d'une étude de ce genre, entreprise lors du lancement projeté d'une nouvelle marque "Electra" (1) de margarine sur le marché américain. Le marché-test choisi était, en l'occurrence, une ville de l'Ouest des Etats-Unis et l'expérience débuta mi-novembre 1958. L'apparition de ce produit sur le marché s'accompagna d'une grande campagne publicitaire, de distributions gratuites d'échantillons, de bons de réduction à l'achat, etc... Simultanément, on étudia tout d'abord, pendant une période s'écoulant de la mi-novembre 1958 à la mi-mai 1959, une série de trends repris dans la figure 2.A.4.1.

Une première courbe (prolongée jusqu'en mi-novembre 1959) décrit l'évolution de la part de marché de la nouvelle marque

(1) Toutes les marques citées sont fictives, le test ayant été fait pour un produit qui se comporte sur le marché de manière similaire à la margarine.

qui, au cours des quatre ou cinq premiers mois de l'expérience, croît rapidement en fonction de l'effort de publicité, décroît ensuite et semble se tasser autour de 12 % dès la mi-mai 1959. Dans cette première phase de l'étude, la période intéressante à analyser est donc celle des sept premiers mois de l'expérience, comprenant d'une part la réaction du marché à l'effort publicitaire de lancement et, d'autre part, la stabilisation de celui-ci vers un comportement de longue durée. Cette étude s'est effectuée principalement au moyen de trois autres lignes de tendance, exprimant respectivement l'évolution des pourcentages des acheteurs traditionnellement fidèles à leur marque, celle de la part de nouveaux consommateurs d'"Electra" dans l'ensemble des consommateurs et enfin celle du taux donnant, à un moment donné, parmi tous les acheteurs d'"Electra", ceux qui en ont acheté lors de leur achat précédent.

La seconde phase de l'analyse a alors consisté à étudier, au moyen d'une matrice de transition, la structure dynamique du marché lorsque celui-ci semblait s'être stabilisé vers la mi-mai. Les résultats ont été consignés dans le tableau 2.A.4.1.

Ce tableau donne une information précieuse ainsi que nous l'avons souligné dans les sections précédentes, concernant le comportement des acheteurs: d'où viennent nos acheteurs, vers où se dirigent ceux qui nous quittent, sont-ils fidèles ou infidèles?... etc... Ces renseignements sont intéressants en ce qu'ils donnent une idée de la structure probable du futur marché du produit et des possibilités stratégiques éventuelles.

Un test de ce type aura finalement pour but de rechercher si le nouveau produit pourra conquérir une partie stable du marché total de manière durable, quelles seront l'ampleur et les caractéristiques de celle-ci et de déterminer ainsi sa rentabilité.

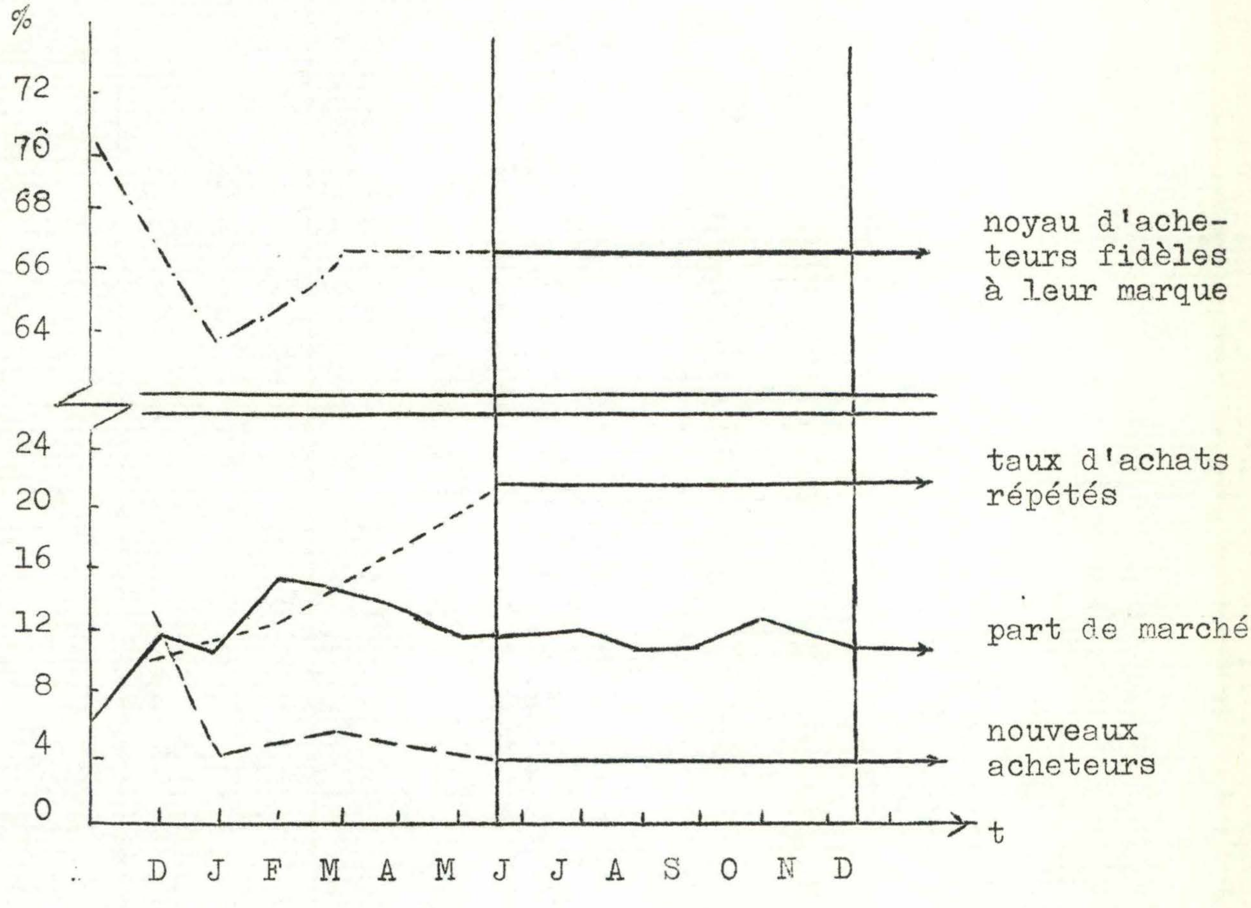


Fig. 2.A.4.1.

Les pourcentages sont calculés sur base de l'ensemble des acheteurs de margarine, sauf dans le cas des taux d'achats répétés qui se rapporte uniquement à la marque "Electra".

		second achat							
	marque	1	2	3	4	5	6	7	Total
premier achat	1.Electra	0,12	0,05	0,07	0,04	0,03	0,28	0,41	1,00
	2.Gloria	0,05	0,25	0,03	0,02	0,02	0,26	0,37	1,00
	3.Meadow-lark	0,03	0,02	0,21	0,05	0,03	0,26	0,40	1,00
	4.Aunt Mary's	0,02	0,05	0,01	0,23	0,04	0,25	0,40	1,00
	5.B.R.Stores Priv Lab	0,04	0,01	0,03	0,02	0,22	0,30	0,38	1,00
	6.Autres	0,03	0,05	0,03	0,04	0,05	0,23	0,57	1,00
	7.N'ont pas acheté de margarine	0,05	0,03	0,04	0,01	0,02	0,28	0,57	1,00

Tableau 2.A.4.1.

2.A.5. Conclusions.-

L'exemple d'application à l'économie de la théorie des chaînes de Markov, développé dans les sections précédentes dans le but de donner une interprétation des concepts théoriques du chapitre 1, a été choisi parmi d'autres pour différentes raisons.

Il semble, tout d'abord, que l'hypothèse markovienne selon laquelle, rappelons-le, la probabilité de prendre telle décision aujourd'hui ne dépend que de la dernière décision qui a été prise, soit une hypothèse de travail suffisamment réaliste pour la construction d'un modèle de comportement du consommateur qui doit faire un choix sur un marché de produits relativement substituables.

Il se fait ensuite que la nature de ce problème permet une élaboration assez poussée du modèle et que le développement de celui-ci pourrait être poursuivi dans de multiples directions en fonction des objectifs particuliers d'une étude concrète. Nous n'avons fait qu'évoquer cette élaboration, ainsi que les diverses orientations qu'elle pourrait prendre, mais ceci nous a permis d'utiliser les concepts et les propriétés théoriques dans un cas d'espèce. Ces concepts et propriétés qui sont, en effet, autant d'outils mathématiques, ne correspondent pas à une réalité économique générale. Ils sont susceptibles d'être utilisés dans les cadres les plus divers et c'est la raison pour laquelle la seule manière de les éclairer d'un jour économique consiste à les appliquer dans un cas particulier.

En outre - et c'est une autre raison du choix qui a été fait - l'utilisation de la théorie des chaînes de Markov dans cet exemple est sans doute le cas d'application le plus fréquent en matière d'économie de la firme. Principalement aux Etats-Unis, certaines firmes, vendant des biens de consommation, ont poursuivi des recherches de ce type, à partir de matériel statistique tel que les "panneaux de consommation" ("consumer's panels"). La principale difficulté semble être que, en fait, la matrice de transition n'est pas homogène dans le temps et que, par conséquent, les probabilités de transition (paramètres du système) devraient elles-mêmes être exprimées comme une fonction des principaux facteurs économiques agissant sur le marché (prix, publicité, revenu disponible des consommateurs, action des concurrents, etc...) (1). De tels modèles ont d'ailleurs été proposés mais ceux-ci ne semblent pas encore avoir atteint le niveau opérationnel.

---

(1) Ce qui peut se faire, par exemple, par une analyse de régression.

2.B. Autres exemples d'applications économiques des chaînes de Markov.

2.B.1. Modèles de distribution.-

L'hypothèse de Markov a souvent été utilisée en théorie macroéconomique et en économétrie, comme hypothèse de base pour la construction de modèles dynamiques (1). Les chaînes de Markov proprement dites, telles que nous les avons définies, semblent toutefois avoir été beaucoup moins envisagées dans ce domaine et les applications de celles-ci se confinent aux modèles de distribution, qu'il s'agisse de revenu, de valeur ajoutée [R 1] ou d'autres grandeurs macroéconomiques. La contribution théorique la plus importante est sans doute celle de D.G. Champernowne [C 1], qui a construit à partir d'un modèle simple, une série de modèles de plus en plus perfectionnés, en abandonnant tour à tour chacune des hypothèses simplificatrices ayant servi de base à son modèle simple.

Supposons que l'éventail des revenus soit divisé en un certain nombre de classes de revenu définies de telle manière que si on exprime l'étendue d'une classe en pourcentage de sa limite inférieure, cette étendue proportionnelle soit constante, quelle que soit la classe de revenu (2). Il faut, en outre, borner inférieurement et supérieurement l'éventail des revenus, de sorte que le nombre de classes de revenu soit fini. Le modèle consiste à considérer la dynamique de la distribution de revenu entre les classes ainsi définies comme étant celle d'un processus stochastique où le revenu annuel d'un individu dépend

---

(1) Elle est, par exemple, sous-jacente au travail de F.G. Pyatt [P 3], concernant la demande de ménagers durables.
(2) Il s'agit d'une progression géométrique de raison 2.

de ce qu'était son revenu l'année précédente. On pose à ce stade une première hypothèse simplificatrice qui sert à rendre constant le nombre de revenus individuels: on supposera qu'à chaque bénéficiaire de revenu qui "meurt", il correspond un héritier et un seul, qui devient à son tour un nouveau bénéficiaire de revenu. Cette hypothèse fait en sorte que le nombre de revenus qui disparaissent est exactement compensé par le nombre de "nouveaux" revenus.

Dans ces hypothèses, les distributions de revenus seront engendrées par

$$X_j(t+1) = \sum_{i=1}^{R} X_i(t)p'_{ij}(t) \qquad (2.B.1.1)$$

où $X_j(t+1)$ représente le nombre de revenus dans la classe de revenus j à l'époque t+1, $p'_{ij}(t)$, la proportion du nombre de revenus passant entre l'époque t et l'époque t+1 de la classe i à la classe j, le nombre de classes de revenu étant R. Il est toutefois utile, pour la suite, de récrire les probabilités de transition sous la forme:

$$p'_{ii+j}(t) = p_{ij}(t) \qquad (2.B.1.2)$$

d'où

$$X_j(t+1) = \sum_{a=j-1}^{j-R} X_{j-a}(t)p_{j-aa}(t) \qquad (2.B.1.3)$$

et "a" indique alors le nombre de classes qu'un revenu "saute" d'une année à l'autre.

Deux autres hypothèses sont faites ici: elles se résument en posant que la distribution de fréquences en j de $p_{ij}(t)$ est indépendante de i et de t. Qu'elle soit indépendante de i signifie que les mouvements (tant vers le haut que vers le bas) d'un revenu le long de l'échelle des revenus sont les mêmes, quelle que soit la classe à laquelle appartient ce revenu. Or, il se fait que, dans la réalité, la mobilité (exprimée en termes absolus) semble être beaucoup plus grande pour les revenus élevés que pour les revenus faibles. Pour cette raison, les intervalles de classes ont été définis par une progression géométrique qui rend la mobilité, mesurée cette fois en nombre de classes (ou en termes relatifs) constante sur tout l'éventail des revenus. Telle est la première hypothèse. La seconde hypothèse est celle de l'homogénéité dans le temps des probabilités de transition, hypothèse peu réaliste, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer dans un autre contexte.

Les hypothèses du modèle simple peuvent dès lors être formalisées comme suit:

(i) $$p_{ij}(t) = 0 \quad \text{si} \quad j > 1 \text{ ou } j < -k \qquad (2.B.1.4)$$

ce qui signifie que le revenu ne peut augmenter qu'au rythme d'une classe de revenu par an et ne peut diminuer qu'à raison de k classes en une année.

(ii) $$p_{ij}(t) = p_j > 0 \text{ si } -k < j < 1 \text{ et } j > -1 \qquad (2.B.1.5)$$

cette condition exprimant l'hypothèse commentée ci-dessus d'indépendance de $p_{ij}(t)$ par rapport à i et t, ainsi que l'impossibilité pour un revenu de descendre en-dessous de la classe minimale.

(iii) $$\sum_{j=-k}^{1} p_j = 1 \qquad (2.B.1.6)$$

expression que l'on peut écrire si on suppose, comme nous l'avons fait ci-dessus, que tous les revenus individuels gardent leur individualité dans le temps.

Telles sont les hypothèses principales et l'interprétation économique correspondante, qui permettent d'écrire le problème de la distribution de revenu sous forme de processus en chaînes de Markov.

Si on pose k = 5, on obtient, par exemple, la matrice de transition

rev./an (.000 fr)	C	0	1	2	3	4	5	6	...	R
10 - 20	0	$1-p_1$	p_1	0	0	0	0	0	...	0
21 - 40	1	$1-p_0-p_1$	p_0	p_1	0	0	0	0	...	0
41 - 80	2	$p_{-5}+p_{-4}+p_{-3}+p_{-2}$	p_{-1}	p_0	p_1	0	0	0	...	0
81 -160	3	$p_{-5}+p_{-4}+p_{-3}$	p_{-2}	p_{-1}	p_0	p_1	0	0	...	0
161 -320	4	$p_{-5}+p_{-4}$	p_{-3}	p_{-2}	p_{-1}	p_0	p_1	0	...	0
321 -640	5	p_{-5}	p_{-4}	p_{-3}	p_{-2}	p_{-1}	p_0	p_1	...	0
641-1280	6	0	p_{-5}	p_{-4}	p_{-3}	p_{-2}	p_{-1}	p_0	...	0
...	.	.	.	.	.	.	.	.	...	.
	R	0	0	0	0	0	0	0	...	p_0+p_1

Une telle matrice de transition étant ergodique par construction, il est possible de calculer la limite vers laquelle elle tend, lorsque le processus se déroule, et d'établir ainsi une distribution de revenu d'équilibre, se reproduisant de période en période. D.G. Champernowne montre que la distribution d'équilibre, correspondant à ce modèle simple, obéit exactement à la loi de Pareto. Des modèles plus complexes ont été construits et dans ceux-ci, la loi de Pareto n'est plus exactement satisfaite, mais elle l'est de manière asymptotique. Ces modèles sont basés sur le modèle simple dans lequel les généralisations suivantes sont successivement introduites:

(i) liberté pour les revenus de s'élever à raison de plus d'une classe par an;

(ii) abandon, dans le cas des revenus inférieurs, de l'hypothèse (2.B.1.5), selon laquelle $p_{ij}^{(t)}$ serait invariant par rapport à i;

(iii) introduction dans la détermination des probabilités de transition d'une classe de revenu à une autre classe de revenu, de l'influence qu'exercent sur celle-ci l'âge et la "profession" des individus.

*

* *

Dans une remarquable étude statistique /H 2/ qu'ils ont faite de la distribution, par dimension, des entreprises britanniques de 1885 à 1950, P.E. Hart et S.J. Prais ont évoqué une possibilité de développement ultérieur de ce travail sur base d'hypothèses stochastiques et notamment au moyen de modèles en chaîne de Markov. Ces auteurs ont établi des matrices de transition montrant comment, de période en période (celles-ci étant d'une longueur moyenne de 10 à 15 ans), la dimension des entreprises britanniques s'est modifiée au cours des 65 années que couvre l'étude. Nous reprenons ci-après, dans le tableau 2.B.1.1 une de ces matrices, correspondant à la période 1907-1924.

Les entreprises retenues sont toutes les entreprises minières, manufacturières ou de distribution dont les actions étaient cotées à la Bourse de Londres. Par "naissance" on entend l'apparition sur le marché de la Bourse d'une nouvelle firme, les "décès" résultant de la disparition de firmes de ce même marché. La dimension de la firme est mesurée au moyen de la valeur totale, au prix du marché, des actions émises. Ces entreprises sont alors classées par ordre de grandeur en classes A, B, C, ... formant une progression géométrique de raison 2, comme c'était le cas dans le modèle de distribution de revenu, commenté ci-dessus. Le but de cette classification est de montrer la validité de la loi de Gibrat ou de "croissance propor-

Cl	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	O	P	Q	R	Tot.	d	Tot. 1907
A	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2
B	-	-	1	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	6
C	-	1	-	1	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	2	10
D	-	-	-	-	3	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11	6	17
E	-	-	-	2	14	16	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	35	29	64
F	-	-	-	-	9	33	34	2	1	-	-	-	-	-	-	-	79	35	114
G	-	-	-	-	2	13	30	23	4	1	-	-	-	-	-	-	65	37	122
H	-	-	-	-	3	3	14	36	14	1	-	-	-	-	-	-	71	54	125
K	-	-	-	-	1	2	9	20	26	5	2	-	-	-	-	-	65	37	102
L	-	-	-	-	-	1	3	5	13	13	5	-	-	-	-	-	40	26	66
M	-	-	-	-	-	-	1	3	4	11	8	-	-	-	-	-	27	10	37
N	-	-	-	-	-	-	-	1	3	5	6	3	-	-	-	-	18	17	35
O	-	-	-	-	-	-	-	2	-	1	6	4	2	-	-	-	15	1	16
P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	3	-	-	-	5	-	5
Q	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-	1	-	3	-	3
R	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1	-	1
Tot.	-	1	2	4	36	77	96	94	65	37	28	9	5	1	1	-	456	270	726
n	-	-	7	5	15	28	23	16	13	5	1	-	-	-	-	-	113	-	-
Tot.1924	-	1	9	9	51	105	119	110	78	42	29	9	5	1	1	-	569	-	-

Tableau 2.B.1.1. Variation de la dimension des entreprises au Royaume-Uni entre 1907 et 1924 (source: /H 2/.

d = décès
n = naissances

tionnelle", suivant laquelle la probabilité pour une firme de croître d'un certain pourcentage au cours d'une période est indépendante de la classe à laquelle elle appartient. Si cette loi est vérifiée - et les auteurs montrent qu'elle l'est dans le cas considéré - la distribution de fréquence des firmes en fonction de leur dimension engendre une distribution log-normale (1).

A partir de pareilles informations et d'une série d'hypothèses de travail, il est possible de construire une théorie des variations dans la dimension des entreprises, analogue à celle que D.G. Champernowne a élaborée en ce qui concerne les classes de revenus. En négligeant les naissances et les décès, des prévisions pourraient être faites concernant, par exemple, l'évolution future de la concentration industrielle.

De nombreuses difficultés surgissent cependant. Tout d'abord, les sources statistiques utilisées par P.E. Hart et S.J. Prais (cotations boursières) ne concernent pas l'ensemble des firmes de l'économie et cet échantillon n'est probablement pas représentatif de l'ensemble de l'économie (seules, les entreprises importantes se présentent à la Bourse). Ensuite, les "naissances" et "décès" rendent les prévisions difficiles, car il semble que ces phénomènes n'obéissent pas aux lois du modèle. Ceux-ci devraient être étudiés séparément avant d'être incorporés dans l'ensemble (2). Enfin, la matrice de transition dégagée ne peut être considérée comme homogène dans le temps, dès que la période étudiée est longue. Ici encore faudrait-il introduire des éléments d'explication supplémentaires pour obtenir des estimations améliorées des paramètres du modèle.

---

(1) Dans [B 8], H.A. Simon et C.P. Bonini prétendent cependant que la distribution de Yule décrirait plus exactement le phénomène.

(2) H.A. Simon et C.P. Bonini (op. cit.) posent comme hypothèse que les "naissances" ne se font que dans les classes inférieures et à un taux fixe. Cette hypothèse, jointe à celles de la croissance proportionnelle et de la constance des coûts, leur permet de faire des estimations relativement valables pour la dimension de dix producteurs d'acier aux Etats-Unis.

2.B.2. Matrices d'échanges interrégionaux et problèmes de développement régional (1).-

Le problème du développement régional peut être décrit comme étant celui du développement harmonisé et simultané de toutes les "régions" constituant un ensemble macroéconomique relativement indépendant des autres ensembles macroéconomiques de même taille et de même nature. Cet ensemble macroéconomique sera, bien sûr, en général la Nation. Il suit de cette définition qu'un problème de développement régional n'existera que si une ou plusieurs régions de l'ensemble apparaissent, du point de vue de leur développement économique, défavorisées, handicapées, retardataires, lorsqu'on les compare aux autres régions. La solution du problème consistera à recycler ou à brancher ces régions "sous-développées" dans l'interdépendance interrégionale afin de lier leur développement à celui des régions plus favorisées.

Encore faut-il, avant de construire un modèle économétrique, définir un moyen de quantifier le degré de développement d'une région (à supposer que la région elle-même ait préalablement été définie, cette entité étant, sans doute, moins aisément cernable qu'il ne paraît à première vue). Nous adopterons comme critère de degré de développement régional le revenu moyen par habitant: il a l'avantage d'être clair et quantifiable, ce qui bénéficiera à cet exposé. Disons cependant, pour toute critique, qu'il n'est pas idéal, loin s'en faut.

Soit R régions géographiques aux revenus correspondant y_i (i = 1, 2, ... R) susceptibles d'être dépensés à l'intérieur de la région ou dans une autre région. Si on suppose que la consommation domestique et les importations sont des fonctions linéaires homogènes du revenu régional (et si toutes les variables sont exprimées en termes réels), l'élément p_{ij} de la matrice stochastique $[P]$ représentera à la fois la propension marginale

(1) Voir [S 5].

et moyenne à dépenser de la région i dans la région j. La matrice $[P]$ sera la matrice des échanges interrégionaux.

Le revenu total de chaque région est constitué des ventes qui se font à l'intérieur de la région ainsi que des ventes de la région à toutes les autres régions, soit

$$y_i = \sum_{j=1}^{R} p_{ji} y_j \qquad (2.B.2.1)$$

et, par conséquent, un vecteur $\{y\}$ donnant la distribution interrégionale de revenus, devra satisfaire l'équation d'équilibre (1):

$$[I - P'] \{y\} = \{0\} \qquad (2.B.2.2)$$

Si $[P]$ est irréductible, la solution $\{\bar{y}\}$ d'équilibre sera unique, à une constante multiplicative près. Ceci implique que, si pour améliorer le sort d'une région on augmente le revenu moyen d'une autre région, on provoque de ce fait une croissance homothétique de toutes les régions, la part de chaque région dans l'ensemble restant la même mais la distance, mesurée en termes absolus, d'une région sous-développée par rapport à une région développée, allant en s'agrandissant. Toutefois, même ce type de croissance est utile à la région sous-développée puisqu'il entraîne une élévation du niveau de revenu de la région.

Si $[P]$ est réductible, la solution précédente est valable à l'intérieur de chaque ensemble clos. Ceci signifie qu'il est impossible d'accroître le revenu d'une région d'un ensemble clos sans accroître d'un montant proportionnel le revenu de chacune des autres régions du même ensemble clos. Mais, par contre,

---

(1) On démontre que, si la matrice $[I - P']$ est singulière, il existe un vecteur $\{y\}$ à composantes positives ou nulles, solution de l'équation (2.B.2.2).

cette conclusion n'est pas vraie d'un ensemble clos à un autre et, pour relever le revenu d'une région sous-développée, on pourra augmenter celui d'une autre région du même ensemble clos, sans que cette mesure de politique économique ne modifie la situation de toutes les régions ne faisant pas partie de l'ensemble clos considéré. Ce résultat était logique a priori, car que $[P]$ soit réductible signifie que l'ensemble des régions peut être décomposé en sous-sensembles disjoints du point de vue des échanges interrégionaux.

En outre, les distributions interrégionales de revenu sont liées d'une période à une autre par l'équation de récurrence:

$$\left[y^{(n+1)}\right] = \left[y^{(n)}\right]\left[P\right] \qquad (2.B.2.3)$$

qui permet d'écrire l'équation dynamique:

$$\left[y^{(n)}\right] = \left[y^{(0)}\right]\left[P\right]^n \qquad (2.B.2.4)$$

On se rappellera ici des propriétés des différents types de probabilités, d'états et de chaînes de Markov, présentées dans le premier chapitre. En particulier, on sait que si la chaîne est finie (ce qui est une hypothèse réaliste dans ce contexte) irréductible, tous les états sont soit périodiques, soit ergodiques.

Si $[P]$ est ergodique, considérons un modèle simple à deux régions dont la matrice des échanges est:

$$\left[P\right] = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (\ 0 < p < 1\ ) \\ (\ 0 < q < 1\ ) \end{matrix}$$

On a, à la limite :

$$\lim_{t \to \infty} \left[P\right]^n = \begin{bmatrix} \dfrac{q}{1-p+q} & \dfrac{1-p}{1-p+q} \\ \dfrac{q}{1-p+q} & \dfrac{1-p}{1-p+q} \end{bmatrix}$$

et si la distribution correspondante de revenu est une distribution d'équilibre (satisfaisant l'équation 2.B:2.2), celle-ci sera:

$$\begin{bmatrix} \bar{y}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} & \frac{1-p}{q}\, y_1^{(0)} \end{bmatrix}$$

où $y_1^{(0)}$ est le revenu initial de la région 1. Ici encore, la variation du revenu d'une région ne peut influencer la répartition limite de celui-ci entre les régions.

Par contre, dans certaines hypothèses, cette répartition peut être modifiée si l'aide à la région sous-développée se fait sous forme d'investissements en capital, qui a pour effet d'élever le produit et le revenu de la région pendant la période courante et toutes les périodes suivantes. Supposons que le modèle soit en équilibre au cours de la période initiale:

$$\begin{bmatrix} \bar{y}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} & \frac{1-p}{q}\, y_1^{(0)} \end{bmatrix}$$

et que, au cours des périodes 1, 2, ..., n, le revenu de la région 1 soit augmenté d'un montant égal à x. On obtient dès lors de période en période un accroissement relatif du revenu de la région 1, accroissement égal au montant de l'injection:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{y}^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (y_1^{(0)} + x) & \frac{1-p}{q}\, y_1^{(0)} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{y}^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1+x)y_1^{(0)} + x & \frac{1-p}{q}\,(y_1^{(0)} + x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{y}^{(3)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1+2x)y_1^{(0)} + x & \frac{1-p}{q}\,(y_1^{(0)} + 2x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

etc...

Si $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$ est périodique, on ne peut obtenir une distribution d'équilibre qui se reproduise de période en période, comme c'était le cas dans l'hypothèse d'une chaîne ergodique. Toutefois, et malgré ce fait, on peut constater par un raisonnement analogue au précédent que la seule manière d'accroître la part relative du revenu de la région sous-développée dans le revenu total, est d'utiliser une politique (d'investissement par exemple) qui ait pour effet de provoquer un flux continu de revenus supplémentaires dans cette région.

Le modèle que nous venons de présenter peut être davantage désagrégé et l'on peut, par exemple, distinguer à l'intérieur de chaque région les trois fonctions respectives de production, de consommation et d'investissement. La matrice stochastique correspondante est obtenue en exprimant chaque élément du tableau comptable interrégional en pourcentage des recettes totales du secteur fournisseur. On obtient ainsi, dans l'hypothèse où le nombre de régions se réduit à deux, dont l'une est, par exemple, une région particulière et l'autre l'ensemble des autres régions, une matrice stochastique du type:

dépenses / recettes		région 1			région 2			
		P	C	I	P	C	I	Total
région 1	P		p_{12}	p_{13}	p_{14}			1
	C	p_{21}			p_{24}	p_{25}		1
	I	p_{31}	p_{32}				p_{36}	1
région 2	P	p_{41}				p_{45}	p_{46}	1
	C	p_{51}	p_{52}		p_{54}			1
	I			p_{63}	p_{64}	p_{65}		1

dans laquelle certains éléments p_{ij} sont nuls.

Il résulte de l'exposé précédent que les conclusions de celui-ci sont toujours valables dans ce modèle plus désagrégé, pourvu que l'on maintienne l'hypothèse d'homogénéité dans le temps des p_{ij}. D'autre part, on peut vérifier que la matrice présentée ci-dessus est ergodique (1). Il s'ensuit donc que, du point de vue statique, une variation des recettes totales d'un secteur d'une région n'aura d'autre effet que de provoquer une variation proportionnelle et de même signe des recettes des autres secteurs de la région, ainsi que des recettes des secteurs de la seconde région. Du point de vue dynamique, d'autre part, la répartition par fonctions et par régions des recettes ne pourra être modifiée que par des injections, répétées de période en période, d'un poste à un autre. Remarquons que pareille mesure revient, en fait, à modifier les éléments d'une ligne de la matrice initiale.

En reprenant le problème par l'autre bout, on peut conclure que, dans le cadre de l'hypothèse d'homogénéité dans le temps des p_{ij}, la répartition des recettes par fonctions et par régions ne peut être modifiée. Si, par contre, on considère une variation des éléments d'une ligne de la matrice initiale, causée par exemple par une décision de politique économique, la présentation donnée ci-dessus permet de déduire quelles sont les implications de cette mesure, du point de vue de la distribution des recettes totales. On peut donc, au moyen de ce modèle et en fonction d'objectifs politiques de répartition, déterminer de manière qualitative et quantitative quelles sont la ou les

---

(1) Pour déterminer si une matrice stochastique est ergodique, il suffit d'en calculer les puissances successives. Si, pour une certaine valeur n de l'exposant, la matrice $[P]^n$ ne comporte que des éléments positifs, toutes les puissances suivantes $[P]^{n+1}$, $[P]^{n+2}$, etc...ne comporteront également que des éléments positifs et la matrice $[P]$ sera ergodique. Dans le cas qui nous intéresse, $[P]^3$ ne comporte plus que des éléments positifs.

mesures politiques qu'il faut envisager. Rappelons toutefois que cette analyse, qui n'est rien d'autre qu'un exercice de statique comparative, n'est réaliste que dans une perspective de court terme, puisqu'elle suppose que les éléments p_{ij} sont homogènes dans le temps. La construction d'un modèle à long terme est toutefois possible, ainsi que nous l'avons déjà indiqué à plusieurs reprises, et on pourrait utiliser, par exemple, une analyse de régression pour exprimer les différents p_{ij} comme fonction d'autres variables économiques, dans le cadre d'un modèle économétrique interrégional.

Si, par contre, on se permettait de considérer les p_{ij} comme étant homogènes dans le temps, il serait intéressant de rechercher quelle serait la structure limite vers laquelle tendrait la matrice initiale. Il faudrait toutefois, dans ce cas, poser la contrainte que cette limite possède la même structure booléenne que la matrice initiale, c'est-à-dire que les éléments nuls de la matrice initiale demeurent des éléments nuls tout au long du processus évolutif.

*

*   *

Dans [C 4], H. Corréa utilise un modèle en chaînes de Markov pour décrire les mouvements migratoires interrégionaux d'un pays. Les probabilités de transition p_{ij} (i, j=1, 2,...,R si le pays est divisé en R régions) représentent, en pourcentage de la population totale de la région i avant migration, la population qui se déplace de cette région i vers la région j au cours d'une migration, ou - en termes de théorie des chaînes de Markov - au cours d'une étape.

L'auteur propose ce modèle pour étudier la distribution géographique de la population dans deux cas alternatifs: ou bien la population immigrante adopte, lorsqu'elle arrive à la région j, le taux de croissance naturel de j, ou bien elle maintient en permanence le taux de croissance naturel de la zone d'origine. Cette dernière alternative, moins réaliste que la première de l'avis de l'auteur de l'article, mais plus intéressante du point de vue opératoire, est ensuite appliquée à la projection depuis 1950, par périodes de dix ans, jusqu'en 1970, de la distribution de la population par province, en Equateur. Ces projections sont alors comparées à d'autres projections obtenues au moyen des coefficients d'élasticité des naissances et la coïncidence des deux types d'estimation est jugée satisfaisante.

Ce modèle repose donc sur les hypothèses simplificatrices énoncées à la section 1.1 du chapitre 1. Ceci signifie, en particulier, d'une part, que les migrations se font de manière discrète dans le temps et que l'intervalle de temps s'écoulant entre deux migrations successives est toujours le même, d'autre part, que la matrice de transition est homogène dans le temps. Ici, de nouveau, c'est sans doute cette dernière hypothèse qui est la moins réaliste: elle suppose, entre autres, que la croissance naturelle de la population de la région i n'influence pas les taux de migration p_{ij}. Cette hypothèse de base du modèle nous semble d'autant plus criticable que les projections se font de décennie en décennie, c'est-à-dire sur des intervalles relativement longs.

2.B.3. Applications des chaînes de Markov dans la gestion des entreprises: un exemple.-

Un domaine où les applications des chaînes de Markov sont particulièrement nombreuses et diverses, au moins potentiellement, est celui de la gestion des entreprises. La plupart des problèmes avec lesquels celle-ci se trouve confrontée sont toutefois des problèmes d'optimation: maximation de profit ou minimation de coûts, et ce type de question sera spécifiquement envisagé dans le chapitre suivant. Etant donné la diversité des sujets traités - allant de la gestion de stocks à celle du portefeuille financier, en passant par le problème du transport - il nous est impossible de donner ici un aperçu, même schématique, des études empiriques ou théoriques qui ont été poursuivies dans ce domaine. Nous décrirons donc, à titre d'illustration et pour montrer jusqu'à quel degré de spécialisation un modèle de chaînes de Markov peut être utilisé, un exemple particulier.

Le modèle choisi [C 7] vise à décrire, au sein d'une entreprise particulière, les mouvements de créances douteuses et d'isoler le montant de celles-ci pouvant finalement être récupéré par la firme.

Si on considère l'ensemble des créances d'une entreprise, celles-ci peuvent, à un moment donné du temps, être classées en différentes catégories, en fonction du nombre de périodes écoulées depuis qu'elles sont arrivées à échéance. Ainsi donc, la catégorie 0 (ou état 0 du système) représentera le montant des créances dont l'échéance se situe dans la période courante, la catégorie 1 (ou état 1), le montant des créances dont l'échéance a eu lieu au cours du mois passé, etc... L'état R sera constitué par toutes les créances échues depuis au moins R mois et qui sont considérées comme irrécupérables. On désignera par b_{ij} le montant moyen des créances passant d'un mois à l'autre de l'état i à l'état j et on ajoutera aux R+1 états, un état $\overline{0}$ tel que $b_{i\overline{0}}$ représente le montant de créances échues depuis i mois et payées au cours de la transition considérée. Comme d'habitude, les probabilités de transition sont alors définies par:

$$p_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{k=\bar{0}}^{R} b_{ik}}$$

exprimant la probabilité qu'une créance d'un franc appartenant à l'état i (c'est-à-dire échue depuis i mois) passe en un mois à l'état j. Remarquons que, dès qu'un franc entre dans l'état $\bar{0}$, il ne peut plus en sortir, puisqu'à ce moment-là la créance est payée et, par conséquent, l'état $\bar{0}$ est un état absorbant. Il en est de même de l'état R, ensemble des créances considérées comme perdues.

Il convient également de préciser la notion de "créance" utilisée dans ce modèle. Une créance est individualisée, non pas par un titre de créance, mais par l'ensemble des titres de créance que la firme détient vis-à-vis d'un client et la créance ainsi définie sera classée dans l'état correspondant à l'échéance la plus ancienne. Ainsi, la créance d'un client classée dans l'état 3 signifie que ce client n'a pas honoré les échéances échues depuis 3, 2 et 1 mois, ainsi que celles du mois courant.

On pose enfin l'hypothèse d'homogénéité dans le temps de la matrice de transition.

Celle-ci sera une matrice de transition d'ordre R+2, comportant deux états absorbants et elle pourra être partitionnée comme suit, ainsi qu'il a été indiqué au chapitre 1:

$$\left[P\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right]$$

(i) Dans le produit $\left[N\right] \left[R\right]$ où $\left[N\right] = \left[I - Q\right]^{-1}$, la première colonne donne les probabilités qu'un franc d'"âge i" soit payé, la seconde donnant les probabilités que ce franc soit irrécupérable. Si, à un moment donné du temps, le vecteur

$$\left[B\right] = \left[B_0, B_1 \ldots B_{R-1}\right]$$

donne le nombre de francs dans chaque état, les deux éléments du vecteur $[B][N][R]$ donnent, l'un les paiements attendus et l'autre le montant des créances perdues.

(ii) Désignons par c le montant total des dettes échues, payées à la firme par ses clients au cours de chaque mois et supposons que ce montant soit distribué entre les différents états suivant les composantes du vecteur

$$[C] = [c_0, c_1, \dots c_{R-1}]$$

Les éléments du vecteur $[C][N][R]$ d'ordre 2 expriment, d'une part, les paiements totaux effectués chaque mois en acquittement de dettes échues et, d'autre part, les pertes certaines encourues par mois.

(iii) Toutefois, dans la plupart des firmes, les ventes ne se font pas à un taux uniforme toute l'année mais suivent, au contraire, bien souvent une courbe cyclique présentant, par exemple, des pointes à Noël, à Pâques et au début de l'automne, lors de la réouverture des écoles. Afin d'incorporer ces constatations dans le modèle, on peut procéder de la manière suivante:

soit $[C_t]$ le vecteur des nouvelles créances ouvertes au cours du mois t, c_t le montant total de celles-ci et $[\gamma_t] = (1/c_t)\,[C_t]$ le vecteur de probabilité correspondant. On suppose que

$$[\gamma_{t-T}] = [\gamma_t] \qquad (2.B.3.1)$$

$$[C_{t-T}] = 1/\alpha\,[C_t] \qquad (2.B.3.2)$$

où α est le taux de croissance, la longueur du cycle étant T. Si, alors, $[N] = [I - Q^T]^{-1}$, on démontre que les éléments de

$$[A_t] = \left[\sum_{k=0}^{T-1} C_{t-k}Q^k\right][N] \qquad (2.B.3.3)$$

$$\{a_t\} = \left[\sum_{k=0}^{T-1} C_{t-k}Q^k\right][N]\{i\} \qquad (2.B.3.4)$$

et

$$[D_t] = \left[\sum_{k=0}^{T-1} C_{t-k}Q^k\right][N][R] \qquad (2.B.3.5)$$

donnent respectivement, pour le mois t, les montants attendus de créances par catégorie d'âge (2.B.3.3), le montant total attendu de celles-ci (2.B.3.4) et les montants attendus des paiements et des créances perdues (2.B.3.5).

Ce modèle pourrait encore être raffiné, mais nous avons voulu n'indiquer que les lignes générales du raisonnement. Quant à l'hypothèse de l'homogénéité dans le temps de la matrice de transition, bien qu'elle semble être plus réaliste dans cet exemple-ci que dans les cas traités précédemment (à cause de la nature du problème et de son caractère de court terme), elle peut à nouveau être mise en doute.

Un modèle, tel que celui qui vient d'être présenté, s'insère dans un cadre plus général de politique de crédit de la firme. Il peut, en effet, fournir des éléments de réponse à des questions telles que: les tolérances de crédit doivent-elles être rendues plus sévères et faut-il instaurer une politique de recouvrement des dettes? Ou, au contraire, la firme peut-elle élargir le crédit afin de promouvoir les ventes?

2.B.4. C o n c l u s i o n s

Il se dégage des exemples d'applications économiques repris dans ce chapitre, que la théorie des chaînes de Markov permet d'étudier la structure et l'évolution dans le temps d'un certain nombre de phénomènes, tant macro que micro-économiques. Il ressort cependant que, particulièrement dans le cas des applications de type macro-économique, l'on se heurte à l'objection que, en réalité, les probabilités de transition ne sont pas homogènes dans le temps. Cette objection provient du fait que les modèles macro-économiques sont, en général, plus typiquement des modèles à long terme, soit par les objectifs à réaliser s'il s'agit de modèles de politique économique, soit encore à cause des séries temporelles disponibles, s'il s'agit de modèles purement analytiques. Dans ces circonstances, il est indiqué de poursuivre la recherche dans le sens d'une élaboration de modèles en chaînes de Markov dont les paramètres ne seraient plus homogènes dans le temps, mais seraient, au contraire, eux-mêmes fonction de variables économiques élémentaires.

Les problèmes de l'économie de la firme, par contre, étant le plus souvent des problèmes de court terme, pourront être analysés de manière plus réaliste au moyen de chaînes de Markov. Ces problèmes sont multiples et de nature très différente. Un grand nombre de ceux-ci peuvent toutefois se formuler en termes de profits à maximer ou de coûts à minimer. C'est ce type de problème qui fera l'objet du troisième chapitre, dans lequel nous dégagerons un certain nombre de méthodes permettant de les résoudre.

Chapitre 3

PROBLEMES D'OPTIMATION

CHAPITRE 3 - PROBLEMES D'OPTIMATION

3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment l'évolution dans le temps de problèmes économiques divers peut être décrite par un processus en chaînes de Markov. Ces problèmes sont toutefois, en général, d'une manière ou d'une autre, des problèmes de recherche d'un optimum. Si, en macro-économie, on peut, par exemple, s'attacher à rechercher une distribution optimale des revenus en fonction de certains critères de "bien-être", le problème de trouver un optimum sera, sans doute, plus typiquement du domaine de la recherche opérationnelle micro-économique. La théorie micro-économique n'est-elle pas, en effet, basée sur le principe que l'entrepreneur cherche à maximer son profit? D'où gestion de stocks, utilisation d'un capital physique, politique de marché, problème de transport, gestion financière, etc.. sont autant de problèmes qui se formulent en termes de la recherche d'un optimum. Nous nous intéresserons, dans ce chapitre, aux problèmes d'optimation qui peuvent se formuler comme une chaîne de Markov. Nous montrerons, à l'aide d'un modèle, d'une part, suffisamment général pour qu'il puisse s'adapter à plusieurs situations particulières et, d'autre part, relativement spécifique pour qu'il puisse être traité mathématiquement, comment l'optimum d'un processus de Markov, qui est un processus séquentiel particulier, peut être obtenu par la programmation dynamique. Une autre méthode de solution, désormais classique, est due à R.A.Howard. Nous décrirons ensuite une formulation en termes de programmation linéaire. Enfin, un type très particulier de minimation de coûts sera présenté, avec une solution correspondante.

3.2. Matrices de gains associés.-

Les problèmes dont il est question dans ce chapitre concernent, soit une maximation de profit, soit une minimation de coûts. Comment, dès lors, introduire ces concepts de profits et de coûts dans les modèles en chaînes de Markov?

Ces processus étant basés sur les transitions que le système peut effectuer, au cours d'une période de temps, d'état à état, on associera tout naturellement, à chacune de ces transitions en une étape, un gain (ou un coût) monétaire correspondant. On obtient ainsi la matrice $[R]$ des gains associés :

$$[R] = [r_{ij}]$$

où r_{ij} représente le gain (ou le coût) que produit le passage du système de l'état i à l'état j, en une étape. Les éléments r_{ij} peuvent prendre des valeurs positives, nulles ou négatives (ces dernières représentant les pertes encourues lors des transitions correspondantes). Notons, incidemment, que, en vertu de la relation d'ordre, tout problème de minimation de coûts se ramène à un problème de maximation de profit, dans lequel la matrice $[R]$ des gains associés ne comportera que des éléments négatifs.

Dans l'exemple qui nous a occupé au chapitre 2, le gain associé sera le profit (ou la perte) dont la firme bénéficiera lorsqu'un consommateur change de marque. L'interprétation de ces gains associés sera donc fonction du problème traité.

Dans ces conditions, le processus de Markov engendre une série de gains au fur et à mesure qu'il effectue des transitions d'un état à un autre. L'élément r_{ij} est donc une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est définie par les relations probabilistes d'une chaîne de Markov.

3.3. Introduction de politiques alternatives.-

La solution du problème d'optimation consiste, dans notre contexte, à choisir parmi un ensemble de politiques pouvant être adoptées, celle qui maximera le profit ou minimera le coût associé au processus. Montrons à l'aide de deux exemples comment, pratiquement, ce problème se présente.

Le problème de stockage est un exemple typique. Les R niveaux différents qu'un stock considéré est susceptible d'atteindre, constituent les R états d'une chaîne de Markov finie. Les transitions d'un état à un autre se font au cours d'une séquence temporelle infinie. On suppose connues les distributions de probabilités de l'offre et de la demande pour le produit stocké (imprévisibles avec certitude) et on suppose que ces distributions sont invariantes dans le temps (hypothèse irréaliste). D'autre part, on dispose d'un ensemble de politiques de gestion de stocks. A chacune de celles-ci, il correspond donc une matrice de probabilités de transition p_{ij} de l'état i à l'état j, ainsi qu'un coût c_{ij} y associé. Le problème d'optimation se formule, dès lors, comme suit: il s'agit de choisir la politique de gestion de stocks qui minime le coût total, après un nombre raisonnablement grand d'étapes.

Un autre exemple classique est le problème de l'inspection, de la réparation et du remplacement d'un équipement dont l'usure peut être représentée par une chaîne de Markov. On pose les hypothèses suivantes: l'état du système ne peut être connu qu'après inspection; l'état du matériel étant connu, on peut soit le remplacer, soit le garder; si on se décide à le garder, il faut déterminer, d'une part, dans quelle mesure il nécessite des réparations immédiates et, d'autre part, à quel moment il convient d'effectuer l'inspection suivante. Les degrés d'usure du matériel correspondent aux différents états d'une chaîne de Markov finie. L'inspection permet de déterminer dans quel état se trouve le système. Si le matériel est remplacé, l'état dans lequel se retrouvera le système sera l'"état neuf".

Si une réparation est effectuée, le système pourra, d'après l'importance de celle-ci, occuper un des nombreux états possibles. On cherche la politique combinée d'inspection, de réparation et de remplacement, qui minime le coût moyen par unité de temps.

Dans les quatre sections suivantes, nous présenterons un modèle de portée suffisamment générale pour qu'il puisse s'adapter aux cas d'espèce, tels que les exemples qui viennent d'être donnés, et trois méthodes de solution du problème d'optimation, tel qu'il vient d'être posé.

3.4. Le Modèle.-

Considérons les R états 1, 2, ... R que le système peut occuper. Supposons qu'au terme de chaque étape une décision de gestion d_{ik} ($i = 1, 2, \ldots R$; $k = 1, 2, \ldots K$) doive être prise et que celle-ci soit fonction de l'état i dans lequel se trouve le système. Nous dirons que le vecteur $\{d_k\}$, faisant correspondre à chaque état dans lequel le système peut se trouver, une décision particulière, constitue une politique. Associons à la décision d_{ik} un coût $c_i(k)$. Le système se trouvant dans l'état i et la décision d_{ik} ayant été prise, une nouvelle étape le fera passer de l'état i à l'état j avec une probabilité $p_{ij}(k)$ et ce passage fournira un gain associé $r_{ij}(k)$.

Définissons le rendement d'une étape, comme étant le gain net récolté au terme de cette étape. Ce rendement est fonction de l'état dans lequel se trouve le système au début de l'étape et de la décision prise. Il s'écrit donc:

$$b_i(k) = -c_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) r_{ij}(k) \quad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots R)\\(k=1,2,\ldots K)\end{matrix} \qquad (3.4.1)$$

Si le processus s'étend sur un certain nombre n d'étapes, on s'intéresse au rendement attendu, lorsque le système part d'un état i et parcourt ces n étapes. Si on désigne par $b_i^{(n)}(k)$ ce rendement attendu, on a:

$$b_i^{(n)}(k) = b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) b_j^{(n-1)}(k) \quad \begin{Bmatrix} (i=1,2,\ldots R) \\ (k=1,2,\ldots K) \end{Bmatrix} \quad (3.4.2)$$

Cette équation de récurrence s'interprète de la façon suivante. Le système partant de l'état i peut atteindre, avec une certaine probabilité, chacun des R états. Nous avons trouvé que le rendement attendu au terme de cette première étape est $b_i(k)$. Après cette première étape, il en reste n-1 à parcourir et le rendement attendu correspondant, si le système part de l'état j, est $b_j^{(n-1)}(k)$. L'espérance mathématique du rendement attendu au cours de ces n-1 étapes restantes est donc le second terme du membre de droite.

La solution du problème d'optimation consiste dès lors, à trouver la politique $\left\{d_{\overline{k}}\right\}$ qui maxime $b_i^{(n)}(k)$.

Notons que ce problème d'optimation pourrait se poser en d'autres termes. Ainsi, par exemple, on pourrait chercher à maximer le temps d'utilisation d'une machine avant que celle-ci ne devienne inutilisable. Cette approche peut être soutenue si le coût de remplacement de la machine est disproportionné par rapport aux coûts d'entretien et de réparation. Nous avons cependant veillé à ce que les solutions données dans les sections suivantes soient suffisamment générales pour qu'elles puissent s'adapter à des formulations telles que celle-là.

3.5. Solution en termes de programme dynamique.-

Cette méthode repose sur ce que Bellman [B 4] appelle le "principe d'optimalité" et qui s'énonce comme suit: une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

Le modèle présenté à la section précédente comporte un nombre fini d'états et le nombre de politiques différentes est également fini (R et K sont finis). D'autre part, on a vu dans les sections précédentes, que le problème se pose en avenir aléatoire et que les lois de probabilité associées sont connues a priori.

Etant donné ces précisions, une solution du problème par la programmation dynamique peut s'écrire:

$$\begin{cases} b_i^{(n)}(\bar{k}) = \max\limits_{k}\left(b_i(k) + \sum\limits_{j=1}^{R} p_{ij}(k) b_j^{(n-1)}(\bar{k})\right) & (3.5.1) \\ \text{avec} \quad b_i^{(0)}(\bar{k}) = 0 & \begin{matrix}(i=1,2,\ldots R) \\ (k=1,2,\ldots K)\end{matrix} \end{cases}$$

où $b_i^{(n)}(\bar{k})$ représente la valeur du rendement attendu en n étapes lorsqu'une politique optimale $\{d_{\bar{k}}\}$ est adoptée. Il se fait, en effet, en vertu de la récurrence, que le système (3.5.1) jouit de la propriété d'optimalité.

Notons que, pour écrire la solution précédente, nous nous sommes placé d'abord au début de la période initiale et que nous avons suivi l'évolution stochastique du processus, de période en période, jusqu'à la dernière période n. On pourrait, bien sûr, procéder de manière exactement inverse et établir la récurrence, non pas par rapport à la période précédente, mais par rapport à la période suivante, en partant de la dernière période et en remontant le temps jusqu'à la période initiale. La présentation proposée, qui convient d'ailleurs mieux à la suite de l'exposé, permet de faire varier n. Ceci est important car, dans le cas où n est fini, la politique optimale $\{d_{\bar{k}}\}$ dépendra de la valeur de n.

Si n est infini, l'équation de récurrence (3.5.1) se ramène à l'équation d'équilibre:

$$b_i^*(\bar{k}) = \max_{k}\left(b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) b_j^*(\bar{k})\right) \qquad (3.5.2)$$

où $b_j^*(\bar{k}) = \lim_{n\to\infty} b_j^{(n)}(\bar{k})$.

Cette équation est l'équation-type d'un système de R équations linéaires à R inconnues: ce système est donc exactement déterminé et le vecteur $\{b^*(\bar{k})\}$, solution du système, est unique. La relation précédente sera le point de départ de la méthode présentée à la section suivante. On peut toutefois la résoudre autrement. Cette méthode de résolution repose sur le fait que, si tous les éléments $r_{ij}(k)$ et $c_i(k)$ sont finis (ce que nous supposons dans ce contexte), les rendements successifs <u>par étape</u> (nous entendons par là le rendement supplémentaire que fournit une étape supplémentaire) sont bornés supérieurement par les termes de la suite convergente $m_i^{(1)}$, $m_i^{(2)}$,..., $m_i^{(n)}$ qui dépendent de l'état de départ, mais pas des différentes décisions qui ont été prises. Ainsi, les rendements relatifs aux étapes n+1, n+2, ... sont respectivement bornés par $m_i^{(n+1)}$, $m_i^{(n+2)}$, ... et la somme de ceux-ci est donc bornée par $m_i^{(n+1)} + m_i^{(n+2)} + \ldots$ La méthode consiste à choisir un vecteur $\{b^{(0)}(\bar{k})\}$ quelconque et de calculer successivement les vecteurs $\{b^{(1)}(\bar{k})\}$, $\{b^{(2)}(\bar{k})\}$,..., $\{b^{(n)}(\bar{k})\}$ à l'aide de (3.5.1). On obtient ainsi des estimations $b_i^{(n)}(\bar{k})$ des $b_i^*(\bar{k})$, telles que $b_i^{(n)}(\bar{k}) - b_i^*(\bar{k})$ est inférieure en valeur absolue à $m_i^{(n+1)} + m_i^{(n+2)} + \ldots$, et, par conséquent tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Il suffira de choisir n suffisamment grand pour que l'erreur faite en remplaçant $b_i^*(\bar{k})$ par $b_i^{(n)}(\bar{k})$, soit négligeable.

Pour déterminer ensuite la politique optimale, on résoud l'équation

$$\max_k \left(b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) b_j^*(k)\right)$$

qui fait correspondre à chaque état i une ou plusieurs décisions optimales.

Remarquons que, dans cette formulation du problème en termes de programmation dynamique, nous n'avons à aucun moment fait allusion à la présence de contraintes. Si, dans une application pratique, de telles contraintes existent et si la formulation précédente est adoptée, ces contraintes interviennent, en fait, dans une phase préalable lors de la définition des différentes politiques possibles. Une politique qui ne tiendrait pas compte des contraintes serait évidemment à rejeter a priori. Le modèle pourrait toutefois être adapté au cas où l'on désirait, tout au long du cheminement dynamique, pouvoir tenir compte, de manière explicite, de ces contraintes.

Nous comparons plus loin les différentes méthodes présentées dans ce chapitre. Remarquons dès maintenant que cette méthode de programmation dynamique présente des avantages par rapport aux méthodes exposées dans les sections suivantes. Tout d'abord, elle est la seule à pouvoir être utilisée dans le cas où le processus n'a pas encore atteint ou approché l'état stationnaire à un certain niveau de convergence. Un autre avantage par rapport aux méthodes suivantes est que celle-ci permet de dégager <u>toutes</u> les politiques optimales, lorsqu'il y en a plusieurs. Si, toutefois, on s'intéresse au cas où n est infini et aux valeurs correspondantes des $b_i^*(\bar{k})$, la méthode exposée ci-dessus ne sera intéressante que dans la mesure où la convergence de $b_i^{(n)}(\bar{k})$ vers $b_i^*(\bar{k})$ est rapide. Dans le cas contraire, en effet, les calculs deviennent rapidement très longs du fait que, à chaque étape du processus récurrent, on doit calculer l'expression (3.5.1) pour <u>toutes</u> les valeurs de k, afin d'extraire de cet ensemble de solutions possibles, celle qui est la plus grande.

3.6. <u>Solution itérative par approximations convergentes</u>.-

La solution présentée dans cette section est due à R.A.Howard dans [H 3].

Elle est basée sur l'idée implicite que, dans beaucoup de problèmes pratiques, le nombre d'étapes parcourues par le système est grand ou que la convergence du système vers la distribution de probabilités stationnaires est rapide (ce qui est, d'ailleurs, généralement le cas, en réalité). On supposera donc, ici, que les matrices de transition $\left[P(k)\right]$ sont ergodiques.

Supposons que dans l'équation (3.4.2), on fixe k, c'est-à-dire qu'on se donne arbitrairement une politique $\left\{d_{k^o}\right\}$ et récrivons l'équation correspondante sous forme matricielle:

$$\left\{b^{(n)}(k^o)\right\} = \left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)\right]\left\{b^{(n-1)}(k^o)\right\} \qquad (3.6.1)$$

Il vient, par récurrence

$$\left\{b^{(1)}(k^o)\right\} = \left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)\right]\left\{b^{(0)}(k^o)\right\}$$

$$\left\{b^{(2)}(k^o)\right\} = \left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)\right]\left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)\right]^2\left\{b^{(0)}(k^o)\right\}$$

$$\dots$$

$$\left\{b^{(n)}(k^o)\right\} = \left[I + P(k^o) + P^{n-1}(k^o)\right]\left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)\right]^n\left\{b^{(0)}(k^o)\right\}$$

et, par différence:

$$\left\{b^{(n+1)}(k^o)\right\} - \left\{b^{(n)}(k^o)\right\} = \left[P(k^o)\right]^n\left\{b(k^o)\right\} + \left[P(k^o)^{n+1} - P(k^o)^n\right]\left\{b^{(0)}(k^o)\right\}$$

Mais puisque, par hypothèse, $\left[P(k^o)\right]$ est ergodique, on a:

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(k^o)\right]^n = \left\{i\right\}\left[\mu(k^o)^{-1}\right]$$

où $\left[\mu(k^o)^{-1}\right]$ est le vecteur de probabilité stationnaire, défini par (voir 1.8.2)

$$\begin{aligned}\left[\mu(k^o)^{-1}\right] &= \left[\mu(k^o)^{-1}\right]\left[P(k^o)\right] \\ \left[\mu(k^o)^{-1}\right]\left\{i\right\} &= 1\end{aligned} \qquad (3.6.2)$$

On peut donc en conclure:

$$\lim_{n\to\infty}\left[b_i^{(n+1)}(k^o) - b_i^{(n)}(k^o)\right] = \left[\mu(k^o)^{-1}\right]\left\{b(k^o)\right\} = g(k^o)$$

où $i = 1, 2, \dots R$ (3.6.3)

Si le nombre n d'étapes est suffisamment grand pour que la distribution de probabilités stationnaires soit atteinte au terme de ces n étapes, à un certain niveau de convergence, l'équation (3.6.3) s'interprète aisément. En effet, dans cette hypothèse et si on adopte toujours la politique $\{d_{k^o}\}$ la probabilité pour que le système se trouve dans l'état j est $\mu_j(k^o)^{-1}$, quel que soit l'état de départ; d'autre part, le rendement d'une étape, à partir d'un état j est $b_j(k^o)$ et la valeur

$$g(k^o) = \sum_{j=1}^{R} \mu_j(k^o)^{-1} b_j(k^o)$$

représente donc le gain moyen pour une étape.

Notre objectif est alors de maximer le rendement moyen par étape, g(k), en choisissant la politique optimale.

Par (3.6.1) et (3.6.3), il vient, pour n grand, et en abandonnant l'hypothèse d'une politique déterminée:

$$b_i^{(n)}(k) + g(k) = b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) b_j^{(n)}(k) \qquad (3.6.4)$$

où i = 1, 2, ... R.

ou, sous forme matricielle

$$\{b^{(n)}(k)\} + g(k)\{i\} = \{b(k)\} + [P(k)]\{b^{(n)}(k)\} \qquad (3.6.5)$$

Remarquons que tout vecteur $\{b^{(n)}(k)\}$, solution de (3.6.5) n'est défini qu'à une constante additive près, en vertu de la relation:

$$\sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k) = 1$$

Dès lors, la méthode de R.A. Howard procède comme suit: on choisit une politique quelconque $\{d_{k_1}\}$, à laquélle correspond une matrice stochastique $[P(k_1)]$, un vecteur de coûts $\{c_i(k_1)\}$ et une matrice de gains associés $[r_{ij}(k_1)]$, ce qui permet de déterminer suivant (3.4.1) un vecteur $\left\{b(k_1)\right\}$. En introduisant ces éléments dans l'équation (3.6.5), il vient:

$$\left\{b^{(n)}(k)\right\} + g(k)\left\{i\right\} = \left\{b(k_1)\right\} + \left[P(k_1)\right]\left\{b^{(n)}(k)\right\} \qquad (3.6.6)$$

Cette équation matricielle représente un système de R équations linéaires aux inconnues $g(k)$ et $b_i^{(n)}(k)$, soit R+1 inconnues, se réduisant à R inconnues en posant une des composantes du vecteur $\left\{b^{(n)}(k)\right\}$ arbitrairement égale à zéro. L'équation (3.6.6) permet donc la détermination de $g(k_1)$ et de $\left\{b^{(n)}(k_1)\right\}$, ce dernier en valeurs relatives. On cherche dès lors une nouvelle politique $\left\{d_{k_2}\right\}$ telle que:

$$b_i(k_2) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k_2)b_i^{(n)}(k_1) = \max_k \left[b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k)b_j^{(n)}(k_1)\right] \qquad (3.6.7)$$

où i = 1, 2, ... R.

La maximation du second membre permet, en effet, de découvrir pour chaque indice i la meilleure décision à prendre, l'ensemble de celles-ci définissant la nouvelle politique $\left\{d_{k_2}\right\}$. A partir de $\left\{d_{k_2}\right\}$, on calcule à nouveau $g(k_2)$ et $\left\{b^{(n)}(k_2)\right\}$ par l'équation (3.6.6). La politique optimale $\left\{d_{\bar{k}}\right\}$ sera atteinte lorsque:

$$b_i^{(n)}(\bar{k}) + g(\bar{k}) = b_i(\bar{k}) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(\bar{k})b_i^{(n)}(\bar{k}) =$$

$$= \max_k \left[b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k)b_j^{(n)}(\bar{k})\right]$$

où i = 1, 2, ... R. (3.6.8)

ce qui ne permet plus d'amélioration de la politique.

On peut démontrer comme suit que le processus est effectivement <u>convergent</u>. Soit $\left\{\delta\right\}$ la différence

$$\left\{b(k_2)\right\} + \left[P(k_2)\right]\left\{b^{(n)}(k_2)\right\} - \left(\left\{b(k_1)\right\} + \left[P(k_1)\right]\left\{b^{(n)}(k_1)\right\}\right)$$

L'équation (3.6.6) donne:

$$\left\{i\right\}\left[g(k_2) - g(k_1)\right] = \left\{\delta\right\} + \left[P(k_2)\right]\left(\left\{b^{(n)}(k_2)\right\} - \left\{b^{(n)}(k_1)\right\}\right) - \left(\left\{b^{(n)}(k_2)\right\} - \left\{b^{(n)}(k_1)\right\}\right)$$

En prémultipliant cette relation par le vecteur $\mu(k_2)^{-1}$ et en notant que

$$\left[\mu(k_2)^{-1}\right]\left[P(k_2)\right] = \left[\mu(k_2)^{-1}\right]$$

il vient:

$$g(k_2) - g(k_1) = \left[\mu(k_2)^{-1}\right]\left\{\delta\right\} \qquad (3.6.9)$$

L'accroissement de g(k) sera certainement non négatif puisque les deux vecteurs $\left[\mu(k)^{-1}\right]$ et $\left\{\delta\right\}$ sont positifs; de plus, l'accroissement sera strictement positif si δ_i est positif pour un état au moins dont la probabilité dans le nouveau système n'est pas nulle.

D'autre part, g(k) est nécessairement fini. En effet, g(k) est défini par:

$$g(k) = \sum_{j=1}^{R} \mu_j^{-1}(k)\ b_j(k)$$

c'est-à-dire comme étant une moyenne pondérée d'un nombre fini de termes finis ($b_j(k)$ est fini dès que tous les coûts et gains associés sont finis (voir 3.4.1), ce qui est une hypothèse normale dans ce contexte).

L'équation (3.6.9) permet également de montrer que la solution dégagée est effectivement la <u>solution optimale</u>. En effet, si $g(k_1)$ correspondait à une solution de (3.6.8) et s'il existait cependant une meilleure politique $\left\{d_{k_2}\right\}$, on aurait simultanément

$$g(k_2) - g(k_1) > 0$$

et

$$\delta_i \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots R)$$

ce qui est impossible par (3.6.9).

Par la relation (3.6.7), la méthode de R.A. Howard s'insère dans la méthodologie générale de la programmation dynamique. Cette remarque permet d'ailleurs de justifier le fait que, dans cette seconde demi-étape du processus itératif, on fixe, dans le but de trouver une politique améliorée $\{d_{k_2}\}$, la valeur que prennent certains éléments (les $b_i^{(n)}(k)$) à celle qui est déterminée par la politique précédente $\{d_{k_1}\}$. En d'autres mots, on pourrait se demander quelle est la base qui permet de considérer certains termes de l'équation précitée comme variables et d'autres comme prédéterminés dans l'espace des différentes politiques, alors qu'ils sont, en fait, tous fonction de ces politiques. L'interprétation découle de l'observation suivante. Pour n grand, l'équation (3.6.4) s'écrit, en tenant compte de (3.6.3)

$$b_i^{(n+1)}(k) = b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k)\, b_j^{(n)}(k)$$

qui est l'équation récurrente de la solution (3.5.1) en termes de programme dynamique. Ainsi, on ramène la seconde demi-étape de la méthode de R.A. Howard au principe d'optimalité de Bellman et on a vu à la section précédente que, d'après celui-ci, la solution consiste effectivement à résoudre l'équation

$$b_i^{(n+1)}(k_2) = \max_k \left(b_i(k) + \sum_{j=1}^{R} p_{ij}(k)\, b_j^{(n)}(k_1) \right)$$

3.7. Solution par la programmation linéaire.-

Le problème de la section précédente peut se reformuler comme un programme linéaire, de la manière suivante:

contraintes: $\left[A\right]\{\mu^{-1}\} = \{0\}$

$\left[i\right]\{\mu^{-1}\} = 1$

contraintes de non-négativité: $\mu_i(k)^{-1} \geqslant 0 \quad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots R)\\(k=1,2,\ldots K)\end{matrix}$

fonction objectif: $\max g = \left[b\right]\{\mu^{-1}\}$

où $\left[A\right] = \left[U - P'\right]$; $\left[P\right] = \begin{bmatrix} P(k_1) \\ P(k_2) \\ \cdots\cdots \\ P(k_K) \end{bmatrix}$ et $\left[U\right] = \left[I \; I \; \ldots \; I\right]$

matrice d'ordre (R x KR)

$$\left[\mu^{-1}\right] = \left[\mu_1(k_1)^{-1} \;\; \mu_2(k_1)^{-1} \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \mu_R(k_K)^{-1}\right]$$

et

$$\left[b\right] = \left[b_1(k_1) \;\; b_2(k_1) \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; b_R(k_K)\right]$$

vecteurs à KR composantes.

les contraintes exprimant les conditions (3.6.2) de la section précédente. La matrice $\left[A\right]$ est au plus de rang (R-1), puisque la somme des éléments de chaque colonne est nulle en vertu du fait que les matrices $\left[P(k)\right]$ sont stochastiques. La matrice complète du programme linéaire sera donc, au plus, de rang R.

Ce programme linéaire, ainsi posé, se résoud par la méthode habituelle du Simplexe.

3.8. Solution d'un problème particulier de minimation de coûts.-

Dans cette section, nous adopterons un point de vue assez différent de celui qui avait été adopté dans les sections précédentes et, en ce sens, ces développements peuvent être considérés comme une digression.

Supposons, afin d'illustrer ce dont il s'agit et référant à un des exemples d'application dont nous avons traité dans la seconde partie du chapitre précédent, qu'une matrice des échanges interrégionaux évolue de période en période, comme un processus de Markov. Cela implique, entre autres, que les éléments de cette matrice, qui représentent des propensions marginales et moyennes à dépenser le revenu d'une région dans une autre région, tendent vers une distribution stationnaire (si la matrice est ergodique, hypothèse de base que nous supposerons réalisée tout au long de cette section, afin de simplifier l'exposé). Il a été montré au chapitre 1 qu'il est aisé de calculer le vecteur de probabilités stationnaires vers lequel tend chaque ligne de la matrice de transition initiale (voir 1.10.1), et on peut donc trouver la "structure limite" du commerce interrégional vers laquelle tend la "structure actuelle". (Nous entendons par "structure" une matrice particulière d'échanges interrégionaux). Si, pour des raisons par exemple de développement interrégional harmonisé, cette structure limite s'avère ne pas correspondre à une structure limite idéale, dégagée, d'autre part, dans le contexte de la politique de développement, le problème consiste à modifier la structure actuelle de telle manière que, d'une part, la structure modifiée tende au cours du processus vers la structure proposée, et que, d'autre part, la structure modifiée soit, de toutes les structures ayant pour limite la structure "idéale", celle qui se rapproche le plus de la structure actuelle. Il s'agit évidemment de la minimation des coûts entraînés par la restructuration du commerce interrégional, ce coût étant une fonction croissante de la distance entre la structure actuelle et la structure modifiée. Désignons la structure actuelle par $[P_A]$, la structure modifiée par $[P_M]$ et soit $[v]$ le vecteur de probabilités stationnaires correspondant à la structure limite "idéale", proposée par le plan. Michael Bacharach a montré [B 1] que ce problème se résoud au moyen de ce qu'il appelle les "matrices biproportionnelles"(1).

La solution peut se décrire comme suit: supposons que $[w]$

(1) Une application plus connue, à laquelle la plus grande partie de la thèse précitée est d'ailleurs consacrée - outre les développements théoriques - est l'utilisation des matrices biproportionnelles (ou suivant la terminologie de R. Stone, du procédé R.A.S.) pour l'estimation des coefficients techniques en analyse Input-Output.

soit le vecteur de probabilités stationnaires vers lequel tend chacune des lignes de $\left[P_A\right]^n$ lorsque n tend vers l'infini. On a (voir chapitre 1):

$$\left[w\right] = \left[w\right]\left[P_A\right] \qquad (3.7.1)$$

Nous cherchons une matrice $\left[P_M\right]$, aussi semblable que possible à $\left[P_A\right]$ (afin de minimer le coût de restructuration), telle que:

$$\left[v\right] = \left[v\right]\left[P_M\right] \qquad (3.7.2)$$

où $\left[v\right]$ est le vecteur de probabilités stationnaires <u>préconisé</u> vers lequel tend chaque ligne de $\left[P_M\right]^n$ quand n tend vers l'infini.

La solution découle du théorème suivant. Soit $\left[v\right]$ un vecteur positif. Dans ce cas, la matrice $\left[P_M\right]$ est non négative et satisfait aux conditions

$$\left[P_M\right]\left\{i\right\} = \left\{i\right\} \qquad (3.7.3)$$

$$\left[v\right]\left[P_M\right] = \left[v\right] \qquad (3.7.4)$$

si et seulement si

$$\left[\hat{v}\right]\left[P_M\right] = \left[X\right] \text{ (1)} \qquad (3.7.5)$$

où $\left[X\right]$ est une matrice non négative, satisfaisant aux conditions:

$$\left[X\right]\left\{i\right\} = \left\{v\right\} \qquad (3.7.6)$$

$$\left\{i\right\}\left[X\right] = \left[v\right] \qquad (3.7.7)$$

<u>Preuve</u>:

(a) Condition nécessaire:

$$\left[X\right]\left\{i\right\} = \left[\hat{v}\right]\left[P_M\right]\left\{i\right\} = \left[\hat{v}\right]\left\{i\right\} = \left\{v\right\} \text{ par (3.7.3)}$$

$$\left[i\right]\left[X\right] = \left[i\right]\left[\hat{v}\right]\left[P_M\right] = \left[v\right]\left[P_M\right] = \left[v\right] \text{ par (3.7.4)}$$

---

(1) L'écriture $\left[\hat{v}\right]$ représente la matrice carrée obtenue à partir du vecteur $\left[v\right]$ et définie par $\hat{v}_{ij} = v_i$ si $i = j$
$= 0$ si $i \neq j$

(b) Condition suffisante:

$$\left[P_M\right]\{i\} = \left[\hat{v}\right]^{-1}\left[X\right]\{i\} = \left[\hat{v}\right]^{-1}\{v\} = \{i\} \text{ par } (3.7.6)$$

$$\left[v\right]\left[P_M\right] = \left[v\right]\left[\hat{v}\right]^{-1}\cdot\left[X\right] = \left[i\right]\left[X\right] = \left[v\right] \text{ par } (3.7.7)$$

Etant donné la relation (3.7.5), le problème devient alors celui de trouver la matrice $\left[X\right]$, à partir de laquelle $\left[P_M\right]$ se calcule.

Or, il se fait que $\left[X\right]$ est la solution du processus biproportionnel (solution R.A.S.). Si on définit:

$$\left[P_{A'}\right] = \left[\hat{w}\right]\left[P_A\right]$$

ce processus peut se décrire, dans le cas qui nous occupe, par les relations suivantes:

$$\left[P_{A'}(2t+1)\right] = \left[\hat{r}(t+1)\right]\left[P_{A'}(2t)\right] \qquad (3.7.8)$$

$$\left[P_{A'}(2t+2)\right] = \left[P_{A'}(2t+1)\right]\left[\hat{s}(t+1)\right] \qquad (3.7.9)$$

$$= \left[\hat{r}(t+1)\right]\left[P_{A'}(2t)\right]\left[\hat{s}(t+1)\right]$$

où

$$r_i(t+1) = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{R} p_{A'ij}(2t)} \qquad (3.7.10)$$

$$s_j(t+1) = \frac{v_j}{\sum_{i=1}^{R} p_{A'ij}(2t+1)} \qquad (3.7.11)$$

et où i et j prennent des valeurs de 1 à R si le modèle interrégional comporte R régions, t prenant les valeurs 0, 1, 2, ... et le processus démarrant pour t=0, auquel cas $\left[P_{A'}(0)\right] = \left[P_{A'}\right]$.

M. Bacharach démontre l'<u>unicité</u> (1) de la solution du pro-

---

(1) Voir /B 1/, pp. 73-78.

blème biproportionnel, la <u>convergence</u> (1) de la solution itérative dans notre hypothèse d'application et l'<u>existence</u> (2) de la solution dans les mêmes conditions. Il prouve, en outre, que la matrice $[P_M]$ donne effectivement la structure la plus proche (3) de celle représentée par $[P_A]$, parmi toutes celles qui permettent d'atteindre, à la limite, la structure que l'on s'est proposée.

Nous avons donc trouvé la solution

$$[P_M] = [\hat{v}]^{-1}[X]$$

Celle-ci exige que tous les éléments du vecteur $[v]$ soient positifs, ce qui est toujours le cas si la matrice $[P_M]$ est ergodique, ainsi que nous l'avons supposé. En termes de l'application choisie, cela signifie que, par structure de commerce "idéale", on impliquerait, entre autres, qu'il existe toujours un flux de dépenses, si minime soit-il, de chacune des régions considérées vers chacune des autres régions.

Il convient de souligner également quelques propriétés de la solution:

(i) les éléments nuls dans $[P_A]$ demeurent des éléments nuls dans $[P_M]$.

(ii) il se peut, théoriquement, que si $[P_A]$ est irréductible, $[P_M]$ soit réductible. Cette propriété sort un peu du cadre d'hypothèse que nous nous sommes fixé, puisque nous n'avons raisonné que sur des matrices ergodiques. Il conviendrait d'élargir la discussion afin d'y introduire le cas plus général des matrices réductibles. Il semble, toutefois, qu'en fait, à une matrice $[P_A]$ irréductible correspondra, en géné-

---

(1) Voir /B 1/, pp. 78-90.
(2) Voir op. cit. p. 90.
(3) Voir op. cit. pp. 202-205.

ral, une matrice $[P_M]$ également irréductible. Une remarque analogue doit être faite quant à la périodicité.

Il faut également discuter le concept de coût. Le processus itératif que nous venons de décrire aboutit à minimer le coût de restructuration de la matrice des échanges interrégionaux. Il y a toutefois dans ce problème un autre élément de coût, associé au temps de convergence. En effet, si $[P_M]$ ne converge que très lentement vers la situation idéale $[v]$, de sorte que, pratiquement, celle-ci ne sera jamais atteinte (même approximativement), il sera inutile de supporter le coût de transformer la structure $[P_A]$ en la structure $[P_M]$. Dans ce cas, le "processus $[P_M]$" serait tout simplement "inutilement plus coûteux" que le "processus $[P_A]$". Dans d'autres cas, où la convergence de $[P_M]$ vers $[v]$, tout en restant plus lente que celle de $[P_A]$ vers $[w]$, est cependant satisfaisante, il faudra tenir compte du coût entraîné par la modification structurelle de $[P_A]$ en $[P_M]$, du coût entraîné par la convergence plus lente de $[P_M]$, ainsi que de la distance entre $[v]$ et $[w]$, afin de décider si la solution est praticable. En-deça de cette remarque, il faut d'ailleurs observer que, dans un cas d'application, il se peut qu'un coût plus élevé de restructuration (correspondant à une matrice $[P_{M'}]$,plus éloignée de $[P_A]$ que ne l'était $[P_M]$) soit préféré si cette troisième structure permet d'abaisser relativement plus le coût que nous appellerons ici "de convergence" (c'est-à-dire que le coût associé au temps de convergence de $[P_{M'}]$ vers $[v]$ serait suffisamment plus faible que celui associé au temps de convergence de $[P_M]$ vers $[v]$).

3.9. Conclusions

Nous avons, au cours de ce chapitre, présenté trois méthodes permettant de résoudre les modèles en chaînes de Markov, qui se posent sous forme de problèmes d'optimation. Dans le modèle que nous avons retenu, il s'agit de choisir parmi un ensemble de politiques possibles, celle qui rend le rendement maximum. Certains problèmes sont toutefois des problèmes de minimation de coûts (problèmes de gestion de stocks, par exemple): il est clair que le modèle peut être adapté à ce type de question et les trois méthodes de résolution qui ont été proposées resteront parfaitement valables. D'autre part, le modèle peut également être adapté à la maximation du rendement actualisé et, pour ce faire, il suffit d'introduire dans le raisonnement un taux d'actualisation.

Concluons ce chapitre par une comparaison sommaire des trois méthodes de résolution qui y ont été développées. Chacune de ces méthodes vise à dégager la politique optimale, qui rend le rendement du système maximum, lorsque celui-ci parcourt n étapes.

Ce nombre n d'étapes peut être tel que ou bien l'état stationnaire (s'il s'agit de chaînes ergodiques, ce que nous supposons) soit atteint à un niveau élevé de convergence, ou bien que cet état ne soit pas atteint à ce niveau de convergence. Dans cette seconde hypothèse, seule la méthode de programmation dynamique est utilisable. On suppose, en effet, dans les deux autres méthodes, celle de R.A. Howard et celle de programmation linéaire, que n soit suffisamment grand pour que la distribution de probabilités stationnaires soit approchée: ce n'est que sous réserve de cette hypothèse que g(k), dont on maxime la valeur, représente le rendement moyen par étape.

La méthode de programmation dynamique est également la seule à dégager toutes les politiques optimales, lorsqu'il y en a plusieurs. Les deux autres méthodes aboutissent à <u>une</u> politique optimale, sans nous dire s'il y en a d'autres.

D'autre part, la méthode de programmation dynamique rend le rendement <u>total</u> en n étapes maximum, alors que la méthode de R.A. Howard et la solution par programmation linéaire maxime le rendement <u>moyen</u> par étape.

Supposons que l'on s'intéresse uniquement au cas limite, c'est-à-dire au cas où la distribution de probabilités stationnaires du système (si celui-ci est ergodique) peut être considérée comme étant atteinte. Le problème pourra, dans cette hypothèse, être résolu par chacune des trois méthodes. Quelle est toutefois, parmi celles-ci, la méthode qui donnera le résultat le plus rapidement? La longueur des calculs par la méthode de programmation dynamique dépend de la vitesse de convergence de $b_i^{(n)}(\overline{k})$ vers $b_i^*(\overline{k})$, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, et elle est donc essentiellement variable. Elle augmente exponentiellement avec n puisque cette méthode comporte, à chaque étape de la récurrence, le calcul du rendement total correspondant à chacune des politiques possibles. Tel n'est pas le cas des deux autres méthodes qui sont indépendantes de n. La méthode de R.A. Howard et la méthode du Simplexe en programmation linéaire consistent toutes deux à se déplacer dans l'espace des politiques par itérations successives, de telle sorte que, à chaque itération le rendement moyen par étape, g(k), augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale, ces processus itératifs étant convergents. Remarquons toutefois que la méthode du Multiplexe élaborée par R. Frisch (1), fournit en programmation linéaire plus rapidement une solution que celle du Simplexe. En effet, au lieu de se déplacer de sommet

---

(1) Voir e.a.: R. Frisch, "The Multiplex Method for Linear and Quadratic Programming", Oslo Memo, 21.1.1957.

en sommet le long des arêtes du corps convexe déterminé par les contraintes, cette méthode coupe court en ce qu'elle permet de se mouvoir à l'intérieur du corps convexe, soit de façon complètement libre, dans la bonne direction, c'est-à-dire dans la direction du gradient de la fonction objectif, soit dans un espace dont le nombre de degrés de liberté diminue au fur et à mesure qu'on se heurte aux contraintes.

CONCLUSIONS GENERALES

1. L'utilisation éventuelle de la théorie des chaînes de Markov pour la construction de modèles économiques, pose deux questions préliminaires importantes. La première consiste à se demander si le phénomène étudié peut être décrit de manière réaliste par une chaîne de Markov; c'est-à-dire, la réalité peut-elle être simplifiée sans être amputée, de telle sorte que les hypothèses qui sont à la base de la théorie des chaînes de Markov finies, soient satisfaites? Un second problème est celui de l'estimation statistique des paramètres. Il s'agit de savoir, tout d'abord, si les séries statistiques nécessaires sont disponibles, ensuite quels seront les estimateurs à utiliser et, enfin, comment la signification statistique de ceux-ci peut être testée. Dès que ces points d'interrogation sont levés, il est en général relativement simple de répondre aux questions que l'on se propose d'étudier à l'aide d'un modèle en chaînes de Markov.

Dans les applications économiques, le nombre d'états que peut prendre le système est presque toujours fini. D'autre part, l'hypothèse markovienne selon laquelle la probabilité qu'un système évolutif se trouve dans un certain état à un moment donné du temps ne dépend que de l'état dans lequel se trouvait ce système à l'instant précédent (rappelons cependant que, du fait de l'enchaînement des événements, cet état résume en quelque sorte l'histoire passée du système), est une hypothèse valable pour la description de certains phénomènes économiques. Enfin, l'hypothèse qui précise que l'espace temporel sur lequel le système est défini est discret et à intervalles élémentaires égaux, n'est pas gênante dans un contexte économique qui, pour toutes sortes de raisons ne peut, la plupart du temps, être appréhendé dans sa continuité. Ces applications économiques constituent, le plus souvent, une chaîne de Markov ergodique ou une chaîne réductible à un certain nombre de classes ergodiques. Ces structures sont remarquables par leur propriété fondamentale en vertu de laquelle la distribution de probabilité initiale, homogène dans le temps mais non stationnaire, tend, lorsque le processus évolue, vers une distribution de probabilités stationnaires, qui, elle, est indépendante du temps.

Une mise en ordre de la terminologie, permettant de distinguer clairement quels sont les différents cas qui peuvent se présenter et comment ces différents cas sont hiérarchisés, correspond à l'établissement d'autant de structures fondamentales. Elle fournit ainsi les éléments d'une analyse structurelle qui, procédant par regroupements booléens dans la matrice de transition, constitue une étude statique des cas d'espèce.

A chacune de ces structures correspond un certain nombre de propriétés dynamiques. Celles-ci permettent alors, au cours d'une étude ultérieure, d'établir, sur base des structures dégagées, l'évolution dans le temps du processus considéré.

Cette seconde phase de l'analyse ne pourra toutefois être envisagée que dans la mesure où l'hypothèse de base, qui veut que les éléments de la matrice de transition, paramètres du système, soient homogènes dans le temps, peut être considérée comme suffisamment réaliste. Le réalisme de cette hypothèse est étroitement lié à la longueur de l'intervalle temporel élémentaire s'écoulant entre deux états successifs du système. En d'autres mots, l'hypothèse sera réaliste dans les modèles à très court et à court terme, tandis qu'elle le sera beaucoup moins dans les modèles à moyen et à long terme. Nous avons conclu de cette constatation, que ce fait constitue un handicap fondamental et général pour la description dynamique (ou pour la projection) de phénomènes macroéconomiques par des modèles en chaînes de Markov, ces phénomènes étant plus naturellement des phénomènes à moyen ou long terme. Par contre, l'utilisation de cette théorie, comme technique de Recherche Opérationnelle au sein de la firme, est parfaitement valable.

Dans ce domaine d'application, la recherche est encore trop spéculative, c'est-à-dire qu'elle se limite à la construction de modèles théoriques et à la critique de ceux-ci. Les cas concrets d'utilisation empirique de tels modèles se ramènent quasiment, d'une part, à la description du comportement du consommateur dans le cadre de l'analyse de marché et, d'autre part, à la matière de la gestion des stocks.

Ce dernier problème, ainsi que la plupart des problèmes de l'économie de l'entreprise, peut se réduire à un problème d'optimation. Pour ce faire, on construit un ensemble de modèles en chaînes de Markov (1), destinés à être comparés et exprimant différentes politiques hypothétiques de gestion. Un certain nombre de techniques de résolution sont alors disponibles pour établir quelle est la politique de gestion qui permet de maximer le profit ou de minimer le coût, associé au processus.

2. L'utilisation de la théorie des chaînes de Markov pour la description et l'analyse de phénomènes économiques, est de plus en plus envisagée et de nombreux travaux y ont été consacrés ces dernières années. Pour un certain nombre de raisons, le passage de la théorie mathématique à l'application empirique ne se fait cependant que lentement.

---

(1) Cet ensemble constitue un modèle de simulation.

Le manque d'homogénéité dans la terminologie rend cette théorie peu claire et les relations qui existent entre celle-ci et d'autres théories mathématiques modernes (théorie des graphes, théorie des ensembles, algèbre de Boole, ...) ne sont que trop rarement soulignées. Une recherche rigoureuse et synthétique devrait se faire dans ce sens. Si un tel effort bénéficierait largement à l'économiste, il n'est toutefois pas de sa compétence immédiate.

Un autre domaine d'élaboration scientifique en cette matière est du ressort du statisticien. D'une part, des méthodes d'estimation satisfaisantes des paramètres et des tests statistiques correspondants doivent être établis. D'autre part, le matériel de base nécessaire à l'estimation des paramètres est souvent inexistant ou nettement insuffisant. Nous songeons ici, particulièrement, au modèle de comportement du consommateur. Si, dans quelques pays, certaines séries statistiques utilisables sont établies périodiquement ("consumer's panels"), il ne s'agit là que d'exceptions. Un effort devrait être poursuivi dans ce sens, à l'initiative des firmes elles-mêmes ou d'autres organismes privés.

C'est toutefois, surtout, l'utilisation empirique elle-même qui permettra de dégager quelles sont les ressources et les limitations de tels modèles. Il apparaît que c'est en tout premier lieu, par rapport à l'hypothèse d'homogénéité dans le temps que la validité d'une application doit être jugée. Nous avons souligné à maintes reprises que cette hypothèse n'est normalement pas vérifiée dans les modèles à moyen et long terme. Dans ces cas, il s'agira d'élaborer des modèles plus complexes où les probabilités de transition sont exprimées en fonction des différentes variables économiques qui les conditionnent. Qu'il s'agisse de certains modèles microéconomiques, tel que celui du comportement du consommateur, ou de modèles macroéconomiques, c'est sans doute dans ce sens qu'un effort doit être fait. Dans les modèles à court terme, où l'homogénéité dans le temps est une hypothèse simplificatrice réaliste, il serait utile d'examiner dans quelle mesure il serait possible, premièrement de les perfectionner en marquant, par exemple, le passage d'un univers discret à un univers continu, en second lieu d'étudier au-delà de l'interprétation analytique qu'ils fournissent, leur puissance prévisionnelle et enfin de tâcher de les utiliser conjointement avec d'autres techniques de Recherche Opérationnelle, ce qui permettrait, au moyen des recoupements et des convergences des résultats, d'assurer des descriptions plus correctes du fait économique.

Une autre orientation de la recherche devrait se faire dans le sens d'une analyse concernant l'applicabilité de la théorie des chaînes de Markov et l'aménagement de celle-ci dans les cas de matrices interrégionales de comptabilité, exprimées en flux relatifs, ainsi que nous l'avons esquissé au chapitre 2, de matrices input-output et d'autres présentations matricielles de phénomènes économiques essentiellement sous forme de matrices stochastiques. Il apparaît tout d'abord, qu'une analyse structurelle de telles matrices est facilitée lorsqu'on utilise les propriétés des chaînes de Markov. Plus intéressante cependant serait l'analyse dynamique qui consisterait, par exemple, à se demander vers quelle structure stationnaire le système converge. La difficulté, dans ce cas, est double. Tout d'abord, certains éléments de ces matrices sont nuls et doivent rester nuls de période en période. Ceci constitue une contrainte essentielle. Ensuite, l'hypothèse d'homogénéité dans le temps des paramètres ne sera pas toujours une hypothèse réaliste. Dans certains cas, toutefois, les étapes du processus évolutif pourront être considérées comme étant suffisamment courtes pour que cette hypothèse puisse effectivement être faite (modèles régionaux). Dans d'autres cas, même si celle-ci n'est pas réalisée, il peut être intéressant de savoir vers où évolue un système actuel, pour déterminer de manière qualitative et éventuellement même quantitative, les mesures politiques qui devront être prises afin de réorienter l'évolution du système vers l'état final désiré.

BIBLIOGRAPHIE

[B 1] BACHARACH M., Biproportional Matrices and Input-Output Change, Doctoral Dissertation, University of Cambridge, Dep. of Applied Economics, July 1965.

[B 2] BARFOD B., Mikroøkonomiske dynamiske Haendelserforløb beskrevet som Markoff-Processen, in: Det Danske Marked, 1962, nº 4, pp. 341-364.

[B 3] BARTLETT M.S., An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge University Press, 1955.

[B 4] BELLMAN R., Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.

[B 5] BHARUCHA-REID A.T., Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, N.Y., Mc Graw Hill, 1960.

[B 6] BIERMAN H., The Bond Refunding Decision as a Markov Process, in: Management Science, Vol 12, 1960, pp. 545-551.

[B 7] BILLINGSLEY P., Statistical Methods in Markov Chains, in: The Annals of Mathematical Statistics, U.S.A., Vol 32, 1961, nº 1, pp. 12-40.

[B 8] BONINI C.P. et SIMON H.A., The Size Distribution of Business Firms, in: American Economic Review, Vol 48, 1958, pp. 607-617.

[C 1] CHAMPERNOWNE D.G., A Model of Income Distribution, in: Economic Journal, Vol 43, 1953, pp. 318-351.

[C 2] CHUNG K.L., Contribution to the Theory of Markov Chains I, in: Journal of Research, National Bureau of Standards, U.S.A., Vol 50, 1953, pp. 203-208; et II, in: Transactions American Mathematical Society, Vol 76, 1954, pp. 397-419.

[C 3] CHUNG K.L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Berlin Springer Verlag, 1961.

[C 4] CORREA H., Deux Méthodes d'estimation des migrations internes, in: Documents et Travaux, Vers un Budget de l'Emploi, Séminaire interdisciplinaire de science économique des Professeurs HARSIN et DAVIN, Université de Liège, nº 4, octobre 1966.

[C 5] COX D.R. et MILLER H.D., The Theory of Stochastic Processes, Methuen & Cº Ltd, London, 1965.

[C 6] CRUON R., voir [K 4].

[C 7] CYERT R.M., DAVIDSON H.J. et THOMPSON G.L., Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains, in: Management Science, Vol 8, 1962, nº 3, pp. 287-303.

[D 1] DANTZIG G.B., voir [W 2].

[D 2] DAVIDSON H.J., voir [C 7].

[D 3] de GHELLINCK G., Applications de la Théorie des Graphes, Matrices de Markov, Programmes Dynamiques, in: Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Bruxelles, Vol 3, 1961, nº 1, pp. 5-34.

[D 4] de GHELLINCK G., Les Problèmes de Décisions Séquentielles, in: Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Bruxelles, Vol 2, 1960, nº 2.

[D 5] DENT W., voir [J 1].

[D 6] d'EPENOUX F., Sur un Problème de Production et de Stockage dans l'Aléatoire, in: Revue Française de Recherche Opérationnelle, 1960, pp. 3-16.

[D 7] DERMAN C., A Solution to a Set of Fundamental Equations in Markov Chains, in: Proceedings American Mathematical Society, Vol 5, 1954, pp. 332-334.

[D 8] DERMAN C., On Optimal Replacement Rules when Changes of State are Markovian, in: Mathematical Optimization Techniques, R. Bellman (ed.), The RAND Corporation, 1963.

[D 9] DERMAN C., On Sequential Decisions and Markov Chains, in: Management Science, Vol 9, 1963, pp. 16-24.

[D 10] DERMAN C., Optimal Replacement and Maintenance under Markovian Deterioration with Probability Bounds on Failure, in: Management Science, Vol 9, 1963, nº 3, pp. 478-481.

[D 11] DERMAN C., Stable Sequential Control Rules and Markov Chains, in: Journal of Mathematical Analysis and Applications, U.S.A., Vol 6, 1953, pp. 257-265.

[D 12] DERMAN C. et KLEIN M., Some Remarks on Finite Horizon Markovian Decision Models, in: Operations Research, Vol 13, 1965, pp. 272-278.

[D 13] DE VRIES M.G., The Dynamic Effects of Planning Horizons on the Selection of Optimal Product Strategies, in: Management Science, Vol 10, 1964, nº 3.

[D 14] DOOB J.L., Stochastic Processes, N.Y., Wiley & Sons, 1959.

[D 15] DOOB J.L., Topics in the Theory of Markov Chains, and also Chainsdenumerable Case, in: Transactions American Mathematical Society, Vol 52, 1942, pp. 37-64, et Vol 58, 1945, pp. 455-473.

[D 16] DYNKIN E.B., Théorie des Processus Markoviens, Dunod, Paris, 1963.

[F 1] FARLEY J.V. et PING L.W., A Stochastic Model of Supermarket Flow, in: Operations Research, Vol 14, 1966, pp. 555-567.

[F 2] FARLEY J.V. et KUEHN A.A., Stochastic Models of Brand Switching, in: George Schwartz (ed.), Science in Marketing, Wiley & Sons, N.Y., 1965.

[F 3] FELLER W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol I, Second Edition, Wiley & Sons, N.Y., 1957; et Vol II, Wiley & Sons, N.Y., 1966.

[F 4] FELLER W., Boundaries Induced by Positive Matrices, in: Transactions American Mathematical Society, Vol 83, 1956, pp. 19-54.

[F 5] FELLER W., On Semi-Markov Processes, in: Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., Vol 51, 1964, nº 4, pp. 653-659.

[F 6] FRECHET M., Recherches Théoriques Modernes sur le Calcul des Probabilités, Vol II, Paris, 1938.

[G 1] GORDON P., Théorie des Chaînes de Markov finies et ses applications, Dunod, Paris, 1965.

[H 1] HARARY F. et LIPSTEIN B., The Dynamics of Brandloyalty: a Markovian Approach, in: Operations Research, Vol 10, pp. 19-40.

[H 2] HART P.E. et PRAIS S.J., The Analysis of Business Concentration: a Statistical Approach, in: Journal of the Royal Statistical Society, Vol 119, 1956, pp. 150-191.

[H 3] HOWARD R.A., Dynamic Programming and Markov Processes, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1962 (2de éd.).

[H 4] HOWARD R.A., Stochastic Process Models of Consumer Behavior, in: Journal of Advertising Research, U.S.A., Vol 3, 1963, nº 3, pp. 35-42.

[J 1] JARRETT F.G. et DENT W., Fibre Substitution: a Markov Process Analysis, in: Australian Economic Papers, Vol 5, 1966, pp. 107-130.

[K 1] KANEHISA UDAGAWA et NORIKO ITO, Note on a Relation between the Markov Chain and the Birth and Death Process, in: Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol 4, 1961, nº 1, pp. 27-45.

[K 2] KARLIN S., A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, London, 1966.

[K 3] KAUFMANN A., Méthodes et Modèles de Recherche Opérationnelle, tome II, Dunod, Paris, pp. 383 et ss.

[K 4] KAUFMANN A. et CRUON R., La programmation Dynamique, Dunod, Paris, 1965.

[K 5] KEMENY J.G. et SNELL J.L., Finite Markov Chains, Van Nostrand, Princeton, N.Y., 1959.

[K 6] KEMENY J.G., MIRKIL H., SNELL J.L. et THOMPSON G.L., Finite Mathematical Structures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1958-1959.

[K 7] KEMENY J.G., SNELL J.L. et THOMPSON G.L., Introduction to Finite Mathematics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1957.

[K 8] KLEIN M., Inspection, Maintenance, Replacement Schedules under Markovian Deterioration, in: Management Science, Vol 9, 1962, pp. 25-32.

[K 9] KLEIN M., voir [D 12].

[K 10] KOLESAR P., Minimum Cost Replacement under Markovian Deterioration, in: Management Science, Vol 12, 1966, pp. 694-706.

[K 11] KUEHN A.A., An Analysis of the Dynamics of Consumer Behavior and its Implication for Marketing Management, Doctoral Dissertation, Carnegie Institute of Technology, 1958.

[K 12] KUEHN A.A., voir [F 2].

[L 1] LEVY P., Processus Semi-markoviens, in: Proc. Intern. Congr. Math., Amsterdam, 1954, pp. 416-426.

[L 2] LIPSTEIN B., A Mathematical Model of Consumer Behavior, in: Journal of the Marketing Research, U.S.A., Vol 2, 1965, nº 3, pp. 259-265.

[L 3] LIPSTEIN B., Tests for Test Marketing, in: Harvard Business Review, Vol 39, 1961, pp. 74-77.

[L 4] LIPSTEIN B., The Dynamics of Brandloyalty and Brand Switching, in: Proc., Fifth Annual Conference, Advertising Research Foundation, N.Y., 1959, pp. 101-108.

[L 5] LIPSTEIN B., voir [H 1].

[M 1] MAFFEI R.B., Brand Preferences and Simple Markov Processes, in: Operations Research, Vol 8, 1960, pp. 210-218.

[M 2] MANNE A.S., Linear Programming and Sequentive Decisions, in: Management Science, Vol 6, 1960, pp. 259-267.

[M 3] MIEHLE W., Calculation of Higher Transitions in a Markov Process, in: Operations Research, Vol 6, pp. 693-698.

[M 4] MILLER H.D., voir [C 5].

[M 5] MIRKIL H., voir [K 6].

[N 1] NADDOR E., Markov Chains and Simulations in a Inventory System, in: The Journal of the Industrial Engeneering, U.S.A., Vol XIV, 1963, nº 2, pp. 91-98.

[N 2] NORIKO ITO, voir [K 1].

[O 1] OLIVER R.M., A Linear Programming Formulation of Some Markov Decision Processes, Presented at a meeting of the Institute of Management Sciences, Monterey, U.S.A., April 1960.

[P 1] PING L.W., voir [F 1].

[P 2] PRAIS S.J., voir [H 2].

[P 3] PYATT F.G., Priority Patterns and the Demand for Household Durable Goods, Cambridge University Press, 1964.

[P 4] PYE G., A Markov Model of the Term Structure, in: Quarterly Journal of Economics, Vol 80, 1966, pp. 60-72.

[R 1] REY G., A Markov Chain Prediction of Value Added, in: Statistica Neerlandica, Vol 20, nº 1, 1966.

[S 1] SASIENI M.W., A Markov Chain Process in Industrial Replacement, in: Operations Research Quarterly, Vol 7, 1956, pp. 148-155.

[S 2] SIMON H.A., voir [B 8].

[S 3] SINGER A., The Steady State Probabilities of a Markov Chain as a Function of the Transition Probabilities, in: Operations Research, Vol 12, 1964, pp. 498-499.

[S 4] SMITH H. Jr., voir [S 8].

[S 5] SMITH P.E., Markov Chains, Exchange Matrices and Regional Development, in: Journal of Regional Science, U.S.A., Vol 3, 1961, nº 1, pp. 27-36.

[S 6] SMITH W.L., Regenerative Stochastic Processes, in: Proc. Royal Society, A, Vol 232, 1955, pp. 6-31.

[S 7] SNELL J.L., voir [K 5], [K 6] et [K 7].

[S 8] STYAN G.P.H. et SMITH H. Jr., Markov Chains Applied to Marketing, in: Journal of Marketing Research, U.S.A., Vol I, 1964, nº 1, pp. 50-55.

[T 1] TAKACS L., Stochastic Processes. Problems and Solutions, Methuen & Cº Ltd, London, 1962.

[T 2] THOMPSON G.L., voir [C 7], [K 6] et [K 7].

[W 1] WEISS G.H., A Problem of Equipment Maintenance, in: Management Science, Vol 8, 1962,nº 3, pp. 266-277.

[W 2] WOLFE P. et DANTZIG G.B., Linear Programming in a Markov Chain, in: Operations Research, Vol 10, pp. 702-710.

TABLE DES MATIERES